

LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) FONCTION RÉCIPROQUE

Définition :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J .

Pour tout réel y appartenant à J , d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I .

La fonction définie sur J qui à y associe x est appelé **fonction réciproque** de la fonction f . On la note f^{-1} .

Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x)=x^2$.

Propriété :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J , et f^{-1} sa fonction réciproque.

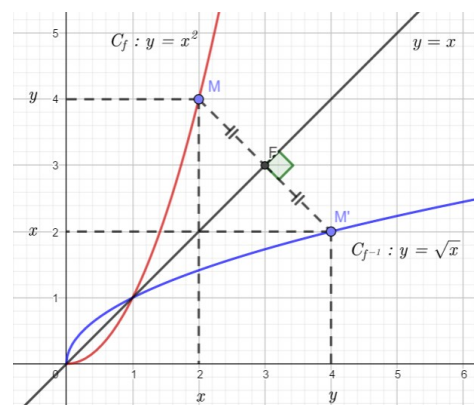
- Pour tout réel x appartenant à J , on a
- Pour tout réel x appartenant à I , on a
-

Propriété : Représentation graphique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J , et f^{-1} sa fonction réciproque.

On note respectivement C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



2) DÉFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle est définie et continue sur \mathbb{R} . De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0; +\infty[$.

Pour tout $y \in]0; +\infty[$, il existe **un unique** réel x tel que $e^x=y$.

Ce réel se note $x = \ln y$, ce qui se lit logarithme népérien de y .

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarque :

L'équivalence

traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

<ul style="list-style-type: none">• Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$• Pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$	<ul style="list-style-type: none">• $\ln 1 = 0$• $\ln e = 1$
--	---

Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

3) PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Propriétés :

<p>Pour tous réels a et b strictement positifs on a :</p> <ul style="list-style-type: none">• $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.• $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	<ul style="list-style-type: none">• $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$
--	---

Preuve : (des deux premiers points)

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

•

•

4) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

La croissance de la fonction \ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18,42$

Conséquences :

<p>Pour tous réels a et b strictement positifs on a :</p> <ul style="list-style-type: none">• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$• $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$	<ul style="list-style-type: none">• $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$• $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$• si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$
---	---

Propriété :

La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

En supposant la fonction \ln dérivable sur \mathbb{R}_+^* et en utilisant la propriété de dérivation de $e^{u(x)}$ on peut écrire pour tout $x > 0$:

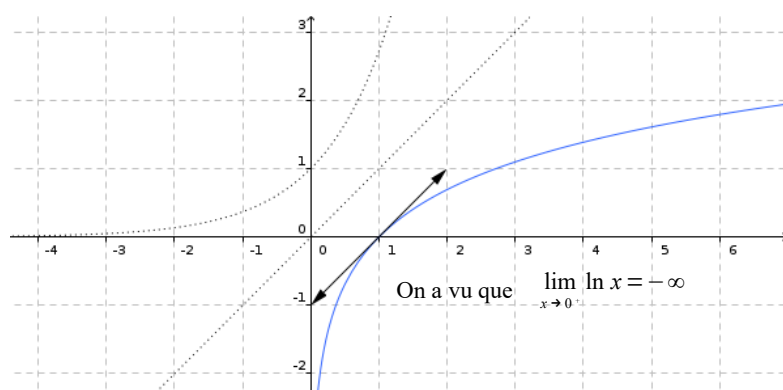
Limites classiques à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	
\ln	

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport

D'autres limites classiques à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Limites classiques de la fonction exponentielle à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5) DÉRIVÉE DE $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $f: x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$