LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) FONCTION RÉCIPROQUE

Définition :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.

Pour tout réel y appartenant à J, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

La fonction définie sur J qui à y associe x est appelé **fonction réciproque** de la fonction f. On la note f^{-1}

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x^2$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Pour tout réel $y \geqslant 0$, l'équation $x^2=y$ admet une unique solution : $x=\sqrt{y}$.

La fonction $f^{-1}: x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction réciproque de la fonction carrée . C'est la fonction racine carrée.

Propriété :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, et f^{-1} sa fonction réciproque.

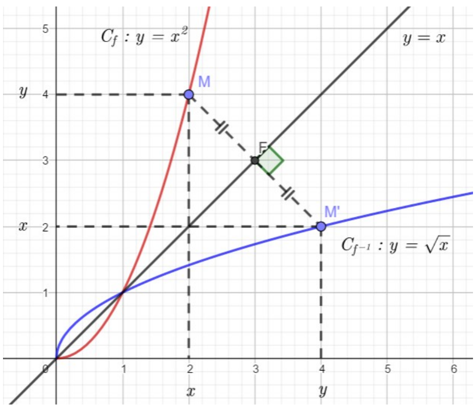
- Pour tout réel x appartenant à J, on a $f(f^{-1}(x))=x$
- Pour tout réel x appartenant à I, on a $f^{-1}(f(x))=x$
- $\begin{cases} x \in \mathrm{I} \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathrm{J} \\ x=f^{-1}(y) \end{cases}$

Propriété : Représentation graphique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, et f^{-1} sa fonction réciproque.

On note respectivement C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



2) DÉFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle et définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.
Pour tout $y \in]0\,;+\infty[$, il existe **un unique** réel x tel que $e^x=y$.
Ce réel se note $x=\ln y$, ce qui se lit logarithme népérien de y.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarque :

L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y=\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y=x \end{cases}$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

• Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x}=x$ • Pour tout réel x, on a $\ln(e^x)=x$	• $\ln 1=0$ • $\ln e=1$	Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

3) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\ln(a^n)=n\ln a$

Preuve : (des deux premiers points)

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

- $e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=a\times b$. Or si $e^y=x$, alors $y=\ln x$. On a donc $\ln a+\ln b=\ln(a\times b)$
- $e^{-\ln a}=\frac{1}{e^{\ln a}}=\frac{1}{a}$ donc $-\ln a=\ln\left(\frac{1}{a}\right)$

4) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8)\approx 18{,}42$

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a=\ln b\Leftrightarrow a=b$
- $\ln a<\ln b\Leftrightarrow a<b$
- $\ln a\leqslant\ln b\Leftrightarrow a\leqslant b$
- $a>1\Leftrightarrow\ln a>0$
- si $0<a<1$ alors $\ln a<0$

Propriété :

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x>0$, $e^{\ln x}=x$.

En supposant la fonction ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété de dérivation de $e^{u(x)}$ on peut écrire pour tout $x>0$:

$$(e^{\ln x})'=(\ln x)'\times e^{\ln x}\Leftrightarrow(x)'=(\ln x)'\times x\Leftrightarrow(\ln x)'=\frac{1}{x}$$ *(et en acceptant les abus de notation pour faciliter)*

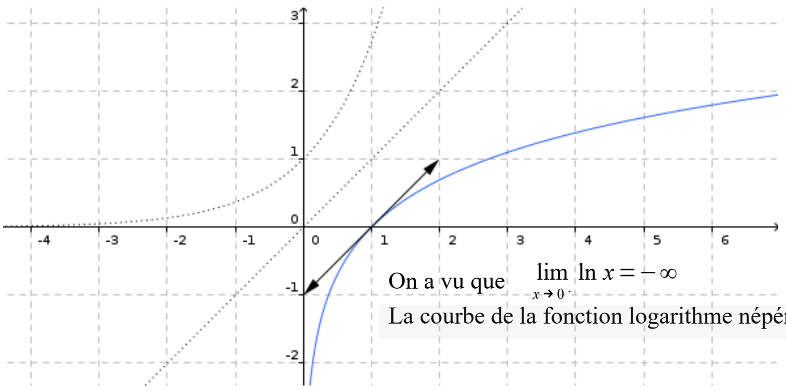
Limites classiques à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On a vu que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

D'autres limites classiques à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Limites classiques de la fonction exponentielle à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

5) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$