**Fonction réciproque :**

Pour tout réel $x$ appartenant à J, on a :

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$$

Pour tout réel $x$ appartenant à I, on a :

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

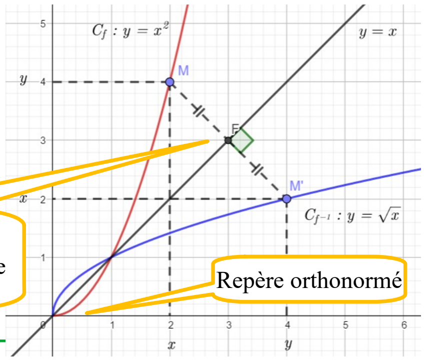
Soit $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.

Pour tout réel $y$ appartenant à J, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I. La fonction définie sur J qui à $y$ associe $x$ est appelé **fonction réciproque** de la fonction $f$ .

On la note $f^{-1}$

$$\begin{cases}x\in \mathrm{I}\\ y=f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\in \mathrm{J}\\ x=f^{-1}(y)\end{cases}$$

Les courbes $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$




Repère orthonormé

**Lien avec la fonction exponentielle :**

La fonction exponentielle et définie et continue sur $\mathbb{R}$ .

De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $y\in ]0\,;+\infty[$ , il existe **un unique** réel $x$ tel que $e^x=y$ .

Ce réel se note $x=\ln y$, ce qui se lit logarithme népérien de $y$ . .

**Définition de la fonction logarithme népérien :**

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel $x$ strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$ .

$$\ln : ]0\,;+\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

$$\begin{cases}x\in \mathbb{R}_+^*\\ y=\ln x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\in \mathbb{R}\\ e^y=x\end{cases}$$

- Pour tout réel $x$ **strictement positif**, on a $e^{\ln x}=x$
- Pour tout réel $x$ , on a $\ln(e^x)=x$

**Propriétés algébriques :**

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs on a :

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$ On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$ , $\ln(a^n)=n\ln a$

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8)\approx 18{,}42$

**Étude de la fonction logarithme népérien :**

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ .

**Conséquences :**

- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$
- $\ln a\leqslant \ln b \Leftrightarrow a\leqslant b$
- $a>1 \Leftrightarrow \ln a>0$
- si $0<a<1$ alors $\ln a<0$

**Continuité et dérivabilité :**

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

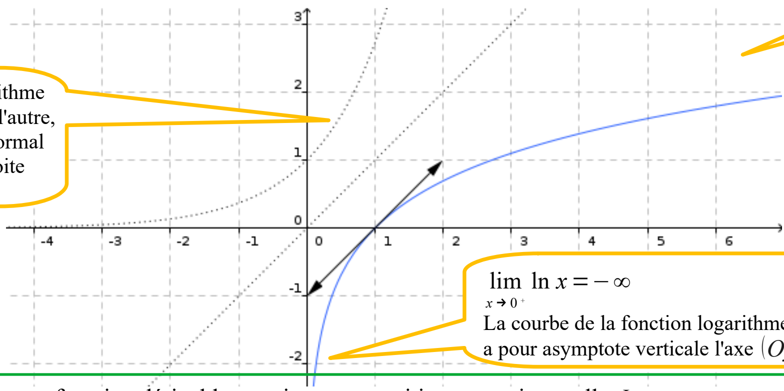
**Limites :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (hors programme)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

**Représentation graphique :**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ .




$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe $(Oy)$.

**Dérivée de ln(u(x)) :**

Soit $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$.

La fonction $f: x\longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $I$, et pour tout $x\in I$ , on a : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

**Calculatrices et Python :**

**Attention**

python

Il existe une autre fonction notée log (logarithme décimal ) définie par $\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ .

Certaines calculatrices ou Python utilise la notation log pour parler de ln et la notation $\log_{10}$ pour parler du logarithme décimal. Soyez prudent !

En python log(x) retourne $\ln(x)$ et log(x,10) retourne $\frac{\ln(x)}{\ln(10)}=\log_{10}(x)$