Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

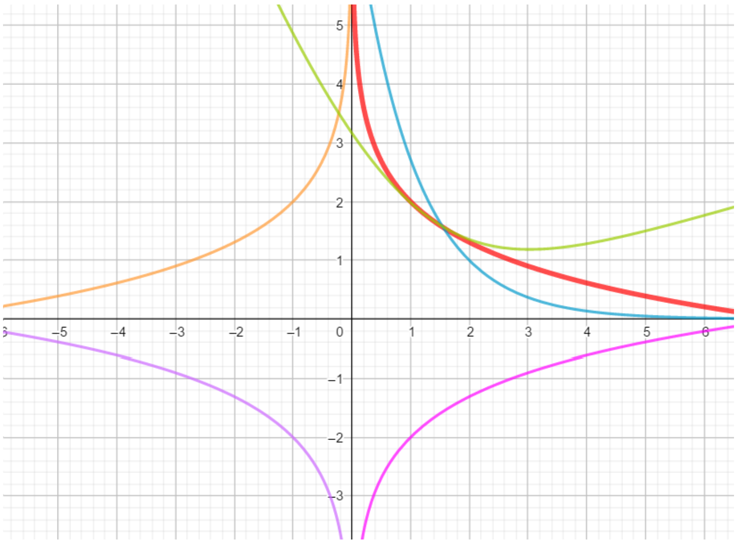
Modèles d'évolution

Approche historique de la fonction logarithme

Fonctions réciproques

Ex 4-1 :

On considère la courbe représentative d'une fonction f représentée en rouge (ou en gras) . Déterminer la courbe représentative de f^{-1} .



Ex 4-2 :

On considère la fonction f définie sur [-3;2] par $f(x)=-2x+5$

1) Dresser le tableau de variation de f sur [-3;2] .

2) Justifier que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} et donner son ensemble de définition.

3) En exprimant x en fonction de y , déterminer l'expression e f^{-1} .

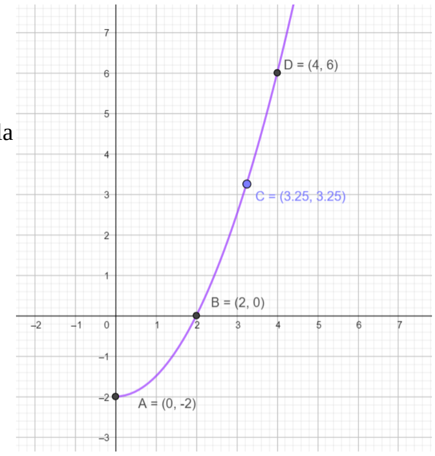
4) Tracer les courbe représentative de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) Que peut-on dire du sens de variation de f et de f^{-1} ?

Ex 4-3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.

Les points A, B , C et D sont quatre points de C_f



1) Justifier graphiquement que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} et donner son ensemble de définition.

2) Lire graphiquement

$f^{-1}(-2)$ =

$f^{-1}(0)$ =

$f^{-1}(3,25)$ =

$f^{-1}(6)$ =

3) Représenter f^{-1} dans le repère ci-dessus.

4) Que peut-on dire du sens de variation de f et de f^{-1} ?

Ex 4-4 :

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x)=3x$ et $g(x)=\frac{x}{3}$.

1) Calculer pour tout réel x , $f(g(x))$ et $g(f(x))$.

2) Que peut-on conclure au sujet des fonctions f et g ?

Ex 4-5 :

Déterminer deux fonctions qui ont pour fonction réciproque elle même.

Fonction logarithme népérien – définition et propriétés algébriques

Ex 4-6 : ***QCM*** *Plusieurs réponses sont possibles.*

1) Équations ...

a) e^3 est la solution de l'équation $\ln x=3$

b) e^{-3} est la solution de l'équation $\ln x=-3$

c) $\ln(3)$ est la solution de l'équation $e^x=3$

d) $\ln(-3)$ est la solution de l'équation $e^x=-3$

e) $-\ln 3$ est la solution de l'équation $e^x=\frac{1}{3}$

f) L'équation $\ln x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=e^m$

g) L'équation $e^x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=\ln m$

2) Formules ...

a) $\ln(a+b)=\ln(a)\times\ln(b)$

b) $\ln(ab)=\ln(a)\ln(b)$

c) $\ln(a-b)=\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

d) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3) $\ln(ab^5)=$ ...

a) $5\ln(ab)$

b) $5(\ln(a)+\ln(b))$

c) $5\ln(a)\ln(b)$

d) $\ln(a)+5\ln(b)$

4) $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=$ ...

a) $-(\ln(a))^2$

b) -1

c) $-2\ln(a)$

d) 0

5) la moitié de $\ln(a)$ est ...

a) $\ln(a)-\ln(2)$

b) $\ln(a^{-2})$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $\sqrt{\ln(a)}$

Ex 4-7 : ***Calculs avec les formules***

Simplifier :

1) $e^{\ln(2)}-e^{\ln(7)}$

2) $3e^{\ln(5)}+5e^{-\ln(3)}$

3) $\ln(2\sqrt{3})+2\ln(\sqrt{3})$

4) $\ln\left(\frac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$

5) $\frac{\ln(125)}{\ln(25)}$

6) $\frac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$

7) $\ln(1+e^x)-x-\ln(1+e^{-x})$

Ex 4-8 : ***Équations et inéquations***

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $(e^x-2)(e^{2x}-8)=0$

2) $(e^{x-1}-3)^2=0$

3) $(e^{x^2+2x+5}+e^{-x})(3e^x+4)=e$

4) $8-4e^{\ln(0,5)\times x+1}>0$

5) $e^{3x+5}<3e^x$

6) $(2e^x-10)(5-e^x)<0$

Ex 4-9 :

Compléter …

1) La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point A(ln2 ; …) et B(… ; π)

2) L'ensemble des réels x tels que $\ln(x)\leqslant 0$ est …

3) Si $e^a=b$ $(b>0)$, alors ln(…) = …

4) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(e^x)=x$

5) $\forall$ x $\in$ … , $e^{\ln(x)}=x$

6) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(x)>0$

Ex 4-10 : ***Calculs***

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$:

a) $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$

b) $\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)$

c) $\frac{\ln 64}{\ln 81}+\frac{\ln 49}{\ln 7}$

2) Simplifier :

a) $4\ln(e^2)+\ln(\sqrt{e})$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^3}\right)$

c) $\frac{\ln(e^4)}{(\ln(e^3))^2}$

3) Calculer :

a) $\ln 3+\ln 9+\ln 27$

b) $\ln(\sqrt{5}-2)+\ln(\sqrt{5}+2)$

Ex 4-11 : ***Vrai ou faux***

Justifier

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln(x^3)=3\ln(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^x)=x+\ln(1+e^{-x})$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{8x})-4x=\ln(e^{4x}+e^{-4x})$

Étude de la fonction logarithme népérien

Ex 4-12 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) L'ensemble de définition de la fonction ln est :

a) $[1;+\infty[$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^-$ e) $\mathbb{R}_+^*$ f) $]0;+\infty[$

2) La fonction ln :

a) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) est strictement positive sur $]1,+\infty[$.
d) est égale à sa dérivée.
e) prend la valeur 1 en 0.

3) Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

a) La droite $\Delta : y=0$ est une asymptote à C .
b) C coupe l'axe des abscisses.
c) C admet une tangente de coefficient directeur -2.
d) C et la courbe de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $d : y=x$.

Ex 4-13 : ***Déterminer une limite***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{3}{x}-4x-3x\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x^3-\frac{5\ln x}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 1-} \left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0+} (2x+\ln x)^2$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-e^x}{x}$

Ex 4-14 : ***Dérivées***

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

1) $f(x)=\dfrac{3x}{\ln(x)}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln(x)-\ln(3)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ sur $\mathrm{I}=]e;+\infty[$

4) $f(x)=(\ln x)^2-\dfrac{1}{\ln x}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

Ex 4-15 : ***Tangente à la courbe***

Déterminer les coordonnées du point de la représentation graphique C de la fonction ln en lequel la tangente T a pour coefficient directeur 2.

Ex 4-16 : ***Signe d'une fonction grâce au sens de variation***

Dans chaque cas, déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) $f(x)=2x^2-\ln x$

2) $f(x)=x\ln x+\mathrm{e}$

.

Ex 4-17 : ***Déterminer une limite comportant une forme indéterminée***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x^2-3x\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x-x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\ln 2}{x}+\ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\ln x)^2-3\ln x+2\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\ln x}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\mathrm{e}\ln x\right)$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-5x}{1+x}$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$

Ex 4-18 : ***Inéquations comportant*** q^n

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Déterminer le plus petit entier n tel que :

1) $3 \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n < 0,01$

2) $1 - 1,25^n < 0,99$

B) On sait que le nombre d'atomes de carbone 14, en fonction du nombre n de siècles, est donné approximativement par $q_n = q_0\, 0,987976^n$, où q_0 est le nombre initial d'atomes.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des atomes de carbone 14 s'est désintégrée)

2) Déterminer l'âge des fragments trouvés par des archéologues, sachant que la teneur en carbone 14 est égale à 30 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse pris comme témoin.

Fonctions du type $x : \longmapsto \ln(u(x))$

Ex 4-19 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(u(x)) > 0$

2) La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

3) La dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

5) $\ln(u(x)) \geqslant \ln 5 \iff x \geqslant 5$

6) $\ln(u(x)) \leqslant 5 \iff 0 < u(x) \leqslant e^5$

Ex 4-20 : ***Résoudre une équation ou une inéquation comportant*** $\ln(u(x))$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x - 5) = \ln 4$

2) $\ln(2x-5)=-3$

3) $\ln(7x+2)\geqslant\ln(3-x)$

4) $\ln(e^{2x}-25)\geqslant 0$

5) $\ln((x+1)(x-2))\geqslant\ln 18$

6) $\ln(1-x^2)-\ln(x-3)\geqslant 0$

<u>Ex 4-21 :</u> ***Signe d'une fonction***

Étudier le signe des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(x-3)\ln(x-1)$ définie sur $]1;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln(x-1)}$ définie sur $]1;2[\cup]2;+\infty[$

3) $h(x)=\ln\left(\frac{e^x-3}{e^x-1}\right)$ définie sur $]-\infty;0[\cup]\ln(3);+\infty[$

<u>Ex 4-22 :</u> ***Ensemble de définition***

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x)=\ln(x^2)-3$

2) $f(x)=\ln(e^x-1)$

3) $f(x)=\ln(x^2-3)$

4) $f(x)=\frac{1}{\ln(x+2)}$

5) $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

<u>Ex 4-23 :</u> ***Tableau de variations***

Donner le tableau de variations des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(\ln x)^2-\ln(x^2)$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$ sur $I=]-\infty;1[$

3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ sur $I=\mathbb{R}$

Problèmes et algorithmes

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x=10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x=100$, la valeur 3 lorsque $x=1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k\times \ln x$ avec $k=\dfrac{1}{\ln 10}$, il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative . les formules sont identiques à celles de la fonction logarithme népérien :

$\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log(a\times b)=\log a+\log b$, $\log\dfrac{1}{a}=-\log a$, $\log\dfrac{a}{b}=\log a-\log b$, $\log\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\log a$ et $\log a^n=n\log a$

Ex 4-24 : ***Niveau sonore***

Le niveau sonore N d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par $N=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité sonore exprimé en W/ m^2 , et où I_0 est l'intensité de référence correspondant à la plus petite intensité acoustique audible.

On sait que, lorsqu'on met en présence plusieurs sources sonores, les intensités s'additionnent.
1) Le niveau sonore d'un lave-linge est de 50 dB.
Quel est le niveau sonore de deux lave-linges identiques ?
Le niveau sonore a-t-il doublé ?

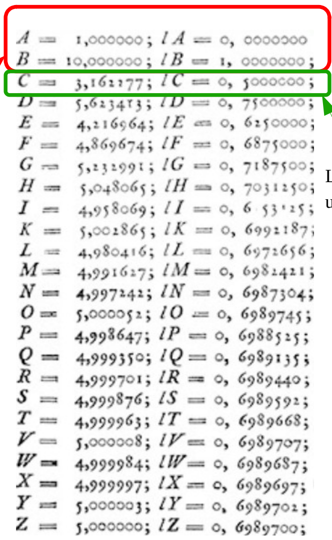
2) Le niveau sonore d'une note de musique obtenue au violon est de 70 dB . Combien faut-il de violonistes jouant ensemble la même note, pour obtenir un niveau sonore de 80 dB ?

3) Le niveau sonore d'un marteau-piqueur est de 110 dB et celui d'un klaxon de voiture est de 80 dB. Quel est le niveau sonore des deux bruits réunis ? Que remarque-t-on ?

Ex 4-25 : ***Algorithme de Briggs***

Dans introduction à l'analyse infinitésimale (1748), Euler explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de log(5).

Ses calculs sont donnés dans le tableau ci-dessous :



$A =$	1,000000 ;	$lA =$	0, 0000000
$B =$	10,000000 ;	$lB =$	1, 0000000 ;
$C =$	3,162277 ;	$lC =$	0, 5000000 ;
$D =$	5,623413 ;	$lD =$	0, 7500000 ;
$E =$	4,216964 ;	$lE =$	0, 6250000 ;
$F =$	4,869674 ;	$lF =$	0, 6875000 ;
$G =$	5,232991 ;	$lG =$	0, 7187500 ;
$H =$	5,048065 ;	$lH =$	0, 7031250 ;
$I =$	4,958069 ;	$lI =$	0, 6 53125 ;
$K =$	5,002865 ;	$lK =$	0, 6992187 ;
$L =$	4,980416 ;	$lL =$	0, 6972656 ;
$M =$	4,991627 ;	$lM =$	0, 6982421 ;
$N =$	4,997242 ;	$lN =$	0, 6987304 ;
$O =$	5,000052 ;	$lO =$	0, 6989745 ;
$P =$	4,998647 ;	$lP =$	0, 6988525 ;
$Q =$	4,999350 ;	$lQ =$	0, 6989135 ;
$R =$	4,999701 ;	$lR =$	0, 6989440 ;
$S =$	4,999876 ;	$lS =$	0, 6989592 ;
$T =$	4,999963 ;	$lT =$	0, 6989668 ;
$V =$	5,000008 ;	$lV =$	0, 6989707 ;
$W =$	4,999984 ;	$lW =$	0, 6989687 ;
$X =$	4,999997 ;	$lX =$	0, 6989697 ;
$Y =$	5,000003 ;	$lY =$	0, 6989702 ;
$Z =$	5,000000 ;	$lZ =$	0, 6989700 ;

Les calculs sont initialisés par

$A=1$, $B=10$,

$lA=0$ et $lB=1$.

La méthode de Briggs utilise la relation

$\log\left(\sqrt{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\log(A)+\log(B)\right)$

$C=\sqrt{AB}$ et

$lC=\frac{1}{2}(lA+lB)$

Pour la suite des calculs, on procède de la façon suivante et on considère uniquement les variables A et B:

- si $\sqrt{AB}\leqslant 5$, alors :

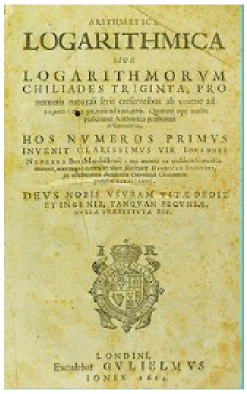
A prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lA prend la valeur $\frac{lA+lB}{2}$

- si $\sqrt{AB}>5$, alors :

B prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lB prend la valeur $\frac{lA+lB}{2}$

Ce qui donne :

A= 3.1622776601683795	lA= 0.5
B= 5.623413251903491	lB= 0.75
A= 4.216965034285822	lA= 0.625
A= 4.869675251658631	lA= 0.6875
B= 5.232991146814947	lB= 0.71875
B= 5.0480657166674705	lB= 0.703125
A= 4.958068241684655	lA= 0.6953125
B= 5.002864610575233	lB= 0.69921875
A= 4.980416061248411	lA= 0.697265625
A= 4.991627716362686	lA= 0.6982421875
A= 4.99724300503361	lA= 0.69873046875
B= 5.00005301775164	lB= 0.698974609375



1) Vérifier les 4 premières lignes de calcul.

2) Compléter l'algorithme suivant écrit en Python, afin qu'il applique l'algorithme de Briggs pour le calcul de $\log(x)$ où x est un réel compris entre 10 et 100 avec une précision de 10^{-k} .
On initialisera l'algorithme avec :
A=10, B=100, lA=1 et lB=2

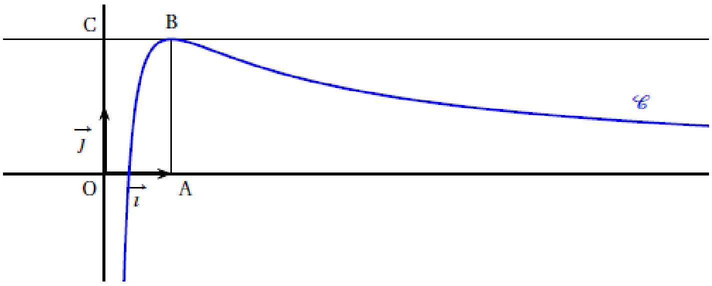
```
from math import *

def CalculeLog_x( x, k ):
    A = ………...
    B = ………...
    lA = ………...
    lB = ………...
    precision = 10**(………..)
    while (B - x > ………… ):
        if (sqrt(A * B) < ……):
            …… = sqrt(A*B)
            …… = 1/2*(lA + lB)
        else:
            …… = sqrt(A*B)
            …… = 1/2*(lA + lB)
    return lB
```

3) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de log(85)

Ex 4-26 : ***Baccalauréat S – Métropole 20 juin 2013 – ex 2***

Fonction ln – utiliser une représentation graphique – étude de fonction – corollaire du TVI – **algorithme de dichotomie**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$;
— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
   c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,1]$.
   b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
from math import *

def f(x):
    y=2/x+2*log(x)/x
    return (y)

a=0
b=1
while (b-a)>0.1:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<1:
        a=m
    else:
        b=m
print ("a=",a,"b=",b)
```

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Ex 4-27 : ***Baccalauréat ES – Liban mai 2018 – ex 4***

Coût moyen de fabrication : Fonction ln – étude de fonction – corollaire du TVI – algorithme de dichotomie

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par

$$f(x)=\frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;25]$.
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;25]$,

$$f'(x)=\frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

b. Résoudre dans $[1\,;25]$ l'inéquation $-3+\ln(x)>0$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;25]$.

d. Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1\leqslant x\leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.
En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.