# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PRIMITIVES

## 1 ) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

**Définitions :**

- **Une équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction $f$.
  L'inconnue est souvent notée $y$ et les dérivées successives sont notées $y'$, $y''$ …
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y + ay' + by'' + ... = 0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

**Exemple :** Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{l} i = 0$

## 2 ) PRIMITIVES

### A ) DÉFINITION

**Définition :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
Une primitive de $f$ sur $I$ est une fonction $F$ dérivable sur $I$, telle que pour tout $x$ dans $I$, $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

**Remarques :**

- Voilà donc un exemple d'équation différentielle : On cherche une fonction $y$, telle que $y' = f$ .
- La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
- De nombreuses fonctions n'admettent pas de primitives.
- On admet ici, mais nous le démontrerons dans le chapitre sur les intégrales que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

### B ) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

**Propriété :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors $f$ admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de $f$ sur $I$ est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

**Preuve :**

- $F$ est dérivable sur $I$ et $F' = f$. La fonction $G$ est aussi dérivable sur $I$ avec $G' = F' = f$.
  Donc $G$ est une primitive de $f$ sur $I$.
- Inversement, si $G$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$ .
  La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle $I$ donc $G - F$ est constante sur $I$. Il existe donc un réel $k$ tel que pour tout $x$ de $I$, $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

**Propriété :**

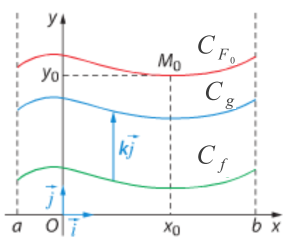
Soit $f$ une fonction admettant des primitives sur $I$.
Pour tout couple de réels $(x_0 ; y_0)$ où $x_0$ est un réel donné dans $I$ et $y_0$ est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule $F_0$ de $f$ sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

**Preuve :**

$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$
Donc l'unique primitive $F_0$ de $f$ sur $I$ vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

**Remarque :**

Les courbes représentatives des primitives de $f$ se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k \in \mathbb{R})$.
Une seule d'entre elles passe par le point $M_0$ de coordonnées $(x_0 ; y_0)$



## C ) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si $F$ et $G$ sont des primitives des fonctions $f$ et $g$ sur un intervalle $I$, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur $I$.
- si $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur un intervalle $I$ et $\lambda$ un réel, alors $\lambda F$ est une primitive de $\lambda f$ sur $I$.

Par ailleurs, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

| Fonctions | Primitives ( $k\in\mathbb{R}$ ) | Intervalle |
|---|---|---|
| $f(x)=a$ ( $a\in\mathbb{R}$ ) | $\mathrm{F}(x)=ax+k$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^n$ ( $n\in\mathbb{N}^*$ ) | $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x}$ | $\mathrm{F}(x)=\ln(x)+k$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ ( $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ) | $\mathrm{F}(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k$ | $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $\mathrm{F}(x)=2\sqrt{x}+k$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x)=\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{F}(x)=\mathrm{e}^x+k$ | $\mathbb{R}$ |

On retiendra aussi le tableau suivant :
Pour une fonction $u$ dérivable sur un intervalle $I$, on a :

| Une fonction de la forme | … admet pour primitive sur $I$ les fonctions : |
|---|---|
| $u'\mathrm{e}^u$ | $\mathrm{e}^u+k$ , où $k\in\mathbb{R}$ |
| $u'\times u^n$, où $n\in\mathbb{Z}$ $(n\neq-1)$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+k$ , où $k\in\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x\in I$, $u(x)>0$ | $2\sqrt{u}+k$ , où $k\in\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ , avec pour tout $x\in I$, $u(x)>0$ | $\ln(u)+k$ , où $k\in\mathbb{R}$ |

## 3 ) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'+ay=0$ d'inconnue la fonction $y$, c'est trouver toutes les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ , telles que pour tout réel $x$ , $f'(x)+af(x)=0$ .

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$ . On ne le répétera donc pas à chaque fois.

**Propriété :** *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$ ) sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-ax}$ où $k\in\mathbb{R}$

On démontre facilement que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=0$ sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-5x}$ où $k\in\mathbb{R}$

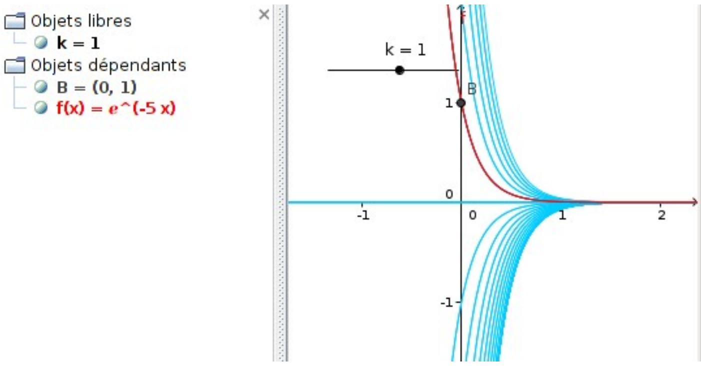
**Remarques :**

L'équation différentielle $y'+5y=0$ peut aussi se noter $f'(x)+5f(x)=0$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x}+5y(x)=0$.
Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de $k$ : $k=10$, $k=9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de $k$.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=1$.




**Propriété :** *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

**Exemple :** Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5y=0$ telle que $f(0)=5$

Il suffit de résoudre l'équation $k\,\mathrm{e}^{-5\times 0}=5$ . On trouve $k=5$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x)=5\,\mathrm{e}^{-5x}$

**Propriété :** *Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant (preuve en exercice)*

Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-ax}+\dfrac{b}{a}$ où $k\in\mathbb{R}$

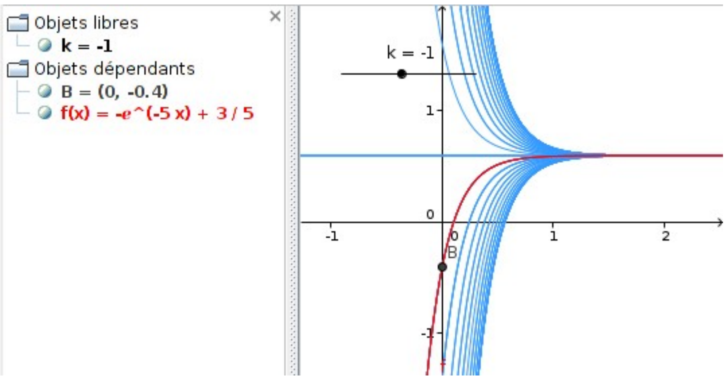
**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$ sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-5x}+\dfrac{3}{5}$ où $k\in\mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de $k$ : $k=10$, $k=9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de $k$

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=-0{,}4$.




**Propriété :** *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

**Exemple :** Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5y=3$ telle que $f(0)=1$.

Il suffit de résoudre l'équation $k\,\mathrm{e}^{-5\times 0}+\dfrac{3}{5}=1$ . On trouve $k=\dfrac{2}{5}=0{,}4$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x)=0{,}4\mathrm{e}^{-5x}+\dfrac{3}{5}$