Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

Primitives

Ex 5-1 : $y'=f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y'=2$

b) $y'=e^x-1$

c) $y'=x^2$

2) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$, des fonctions f, g et h définies par $f(x)=2$, $g(x)=e^x-1$ et $h(x)=x^2$

Ex 5-2 : ***Déterminer les primitives***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=-\frac{5}{x^3}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

3) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{3}e^x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 5-3 : ***Déterminer une primitive vérifiant une condition***

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x)=3e^x+x^2+x^4$ sur $I=\mathbb{R}$ et telle que $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+e^x$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=0$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x+1$ sur sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=4$

Ex 5-4 : ***Primitives de la fonction racine carrée***

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 5-5 : ***Primitives de fonctions composées***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=x^3(x^4+1)$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

3) $f(x)=5e^{2x-3}$ sur $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

5) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 5-6 : ***Un cas compliqué***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 5-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :
1) $y'-3y=0$

2) $y'+2y=0$

3) $2y'-y=0$

Ex 5-8 : ***Avec une condition initiale***

Soit l'équation différentielle (E_0) : $2y'+y=0$
1) Résoudre 1'équation (E_0) .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0)=1$.

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 5-9 : ***Découverte d'une propriété fondamentale***

Soit l'équation différentielle $(E): y'-2y=5$

1) Résoudre l'équation $(E_0): y'-2y=0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(E): y'-2y=5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(E_0): y'-2y=0$, alors y_0+y_p est solution (E).

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y-y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E).
Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donner dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y'=ay+b$

Ex 5-10 : ***Appliquer la formule du cours***

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{F}) : 3y' - 2y = \ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F).

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0)=1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Pour l' exercice 11 on appliquera la propriété déjà montrée sur un exemple :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 5-11 :

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y' - y = x^2 - x - 1$

1) Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_0) : y' - y = 0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=1$

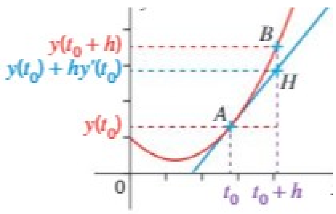
Ex 5-12 : ***La méthode d'Euler***

La modélisation de nombreux problèmes conduit à la résolution d'équations différentielles . Ces équations différentielles sont souvent très difficile à résoudre et il faut alors se contenter de résolutions approchées. **La méthode d'Euler** permet d'obtenir point par point la courbe représentative d'une fonction affine par morceaux qui constitue alors une solution approchée de l'équation différentielle.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.

On considère l'équation différentielle $y'=ay+f$ et on note y la solution de l'équation différentielle telle que $y(\alpha)=\beta$, où α et β sont des réels donnés.

L'idée de la méthode repose sur le principe que pour tout réel t_0, la courbe représentative de y et sa tangente au point d'abscisse t_0 sont presque confondues.



Soit h un réel strictement positif et proche de 0.

On a alors : $y(t_0+h) \approx y(t_0) + h\,y'(t_0)$

1) En déduire que $y(t_0+h) \approx y(t_0) + h\left(a\,y(t_0) + f(t_0)\right)$

2) On considère maintenant l'équation différentielle $y'=y$ avec comme condition initiale $y(0)=1$

Dans ce cas $a=1$ et f est la fonction nulle.

a) Montrer que $y(0+h)\approx 1+h$

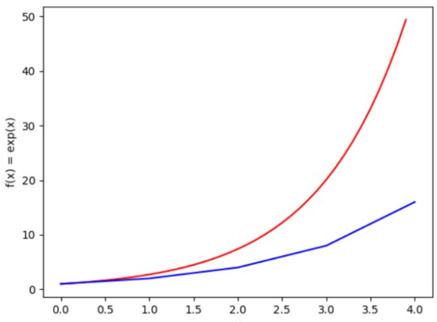
b) Déterminer une approximation de $y(t_0+h)$

3) On considère le programme écrit en python ci-dessous :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

debut = 0
fin = 4
pas = 0.1
x = np.arange(debut,fin,pas)
f = np.exp(x)
plt.plot(x,f,"r") # trace une courbe rouge
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x) = exp(x)')

def Euler (h,n):
    x=0
    y=1
    Lx=[x]
    Ly=[y]
    for i in range(n):
        x=x+h
        Lx.append(x)
        y=y+h*y
        Ly.append(y)
    plt.plot(Lx,Ly,"b")
    plt.show()
    return(Lx,Ly)
Euler(1,4)
```



a) En partant de $y(0)=y'(0)=1$, montrer que l'on obtient $y(1)\approx 2$, $y(2)\approx 4$ et $y(3)\approx 8$ et placer sur le repère ci-dessus les points A(0;1), B(1;2), C(2;4) et D(3;8).

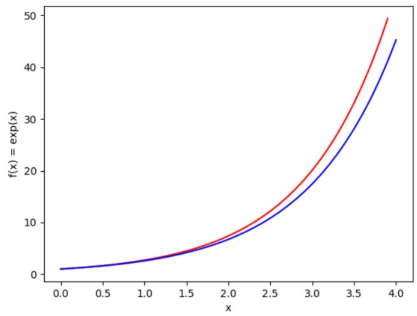
b) Dans la fonction Euler du programme, quelles valeurs a-ton attribuées à h et à n pour obtenir l'affichage de la courbe bleue ci-dessus ?
En déduire le rôle des variables h et n .

c) Déterminer la solution de l'équation $y'=y$ avec la condition initiale $y(0)=1$ et vérifier que sa courbe représentative est la courbe rouge du graphique précédent.

d) Tester la fonction Euler pour différentes valeurs de h et n .

Ci-contre, un exemple

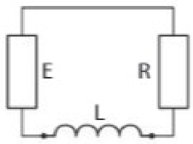
avec $h=0,1$ et $n=40$



Problèmes

Ex 5-13 : *Circuit électrique*

Un circuit électrique en série comprend un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique i (en ampère) est une fonction du temps t (en seconde) et est solution de l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{1}{5}i'(t)+100\,i(t)=10 \quad (\mathrm{E})$$

1) Vérifier que la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(t)=-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-500t}+\frac{1}{10}$ est la solution cherchée de l'équation différentielle (E) en n'oubliant pas de vérifier la condition initiale.

2) Étudier les variations de la fonction i sur $\mathbb{R}^+$, puis tracer le tableau de variations de i, en précisant les limites.

3) Déterminer l'instant t, à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à 0,095 A.
Donner la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-3}.

Ex 5-14 : ***Baccalauréat S – Extrait de Métropole juin 2003***

Modèle d'évolution de bactéries : Équations différentielles

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.

2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E')} \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

b. Résoudre (E').

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\mathrm{M}}{1 + C\mathrm{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \mathrm{M}$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{\mathrm{M}}{2}$.