

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PRIMITIVES

1) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Définitions :

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f . L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y' , y'' ...
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y+ay'+by''+\dots=0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

Exemple : Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{L}i = 0$

2) PRIMITIVES

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Remarques :

- Voilà donc un exemple d'équation différentielle : On cherche une fonction y , telle que $y' = f$.
- La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
- De nombreuses fonctions n'admettent pas de primitives.
- On admet ici, mais nous le démontrerons dans le chapitre sur les intégrales que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

B) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.
Donc G est une primitive de f sur I .
- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.
La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I . Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété :

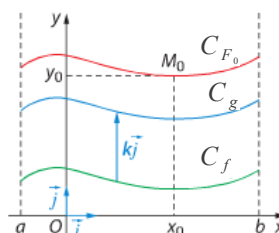
Soit f une fonction admettant des primitives sur I .
Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

Preuve :

$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$
Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ ($k \in \mathbb{R}$).
Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0; y_0)$



C) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

Par ailleurs, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Fonctions	Primitives ($k \in \mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$F(x) = ax + k$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$	\mathbb{R}_+^*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	\mathbb{R}_+^*
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	\mathbb{R}

On retiendra aussi le tableau suivant :

Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I , on a :

Une fonction de la forme	... admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	$e^u + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$\ln(u) + k$, où $k \in \mathbb{R}$

3) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction y , c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} , telles que pour tout réel x , $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur \mathbb{R} . On ne le répétera donc pas à chaque fois.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

On démontre facilement que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-5x}$ où $k \in \mathbb{R}$

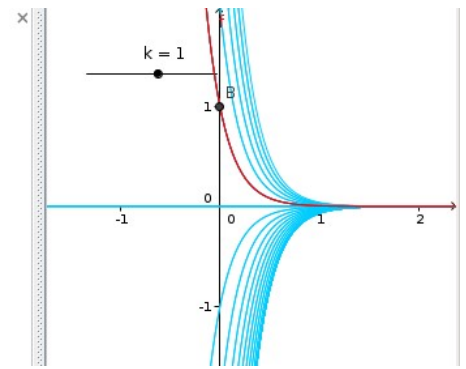
Remarques :

L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0$.

Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k = 10, k = 9, \dots$

- Objets libres
- $k = 1$
- Objets dépendants
- $B = (0, 1)$
- $f(x) = e^{-5x}$



L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k .

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = 1$.

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale donnée

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 5$

Il suffit de résoudre l'équation $k e^{-5 \times 0} = 5$. On trouve $k = 5$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x) = 5 e^{-5x}$

Propriété : Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant (preuve en exercice)

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

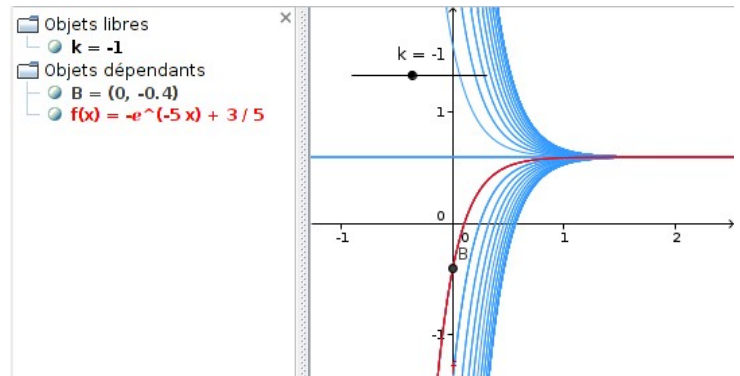
Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-5x} + \frac{3}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k = 10, k = 9, \dots$

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = -0,4$.



Propriété : Solution vérifiant une condition initiale donnée

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ telle que $f(0) = 1$.

Il suffit de résoudre l'équation $k e^{-5 \times 0} + \frac{3}{5} = 1$. On trouve $k = \frac{2}{5} = 0,4$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x) = 0,4 e^{-5x} + \frac{3}{5}$