INTÉGRALES

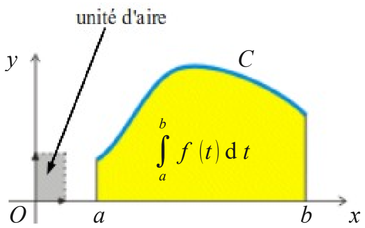
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$



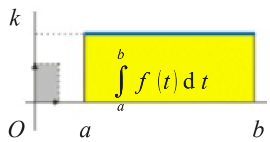
Remarques :

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a\,;b]$ le domaine limité par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit : " intégrale ou somme de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".
  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est $6\ cm^2$.

Exemples :

- Si $a=b$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
- Pour $k>0$, $\int_a^b k\,\mathrm{d}t=k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.

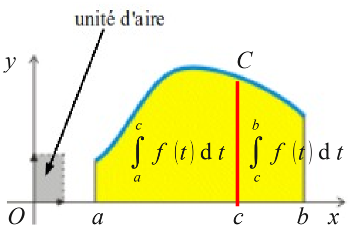


B) RELATION DE CHASLES

Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel. On a :

- $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- $\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

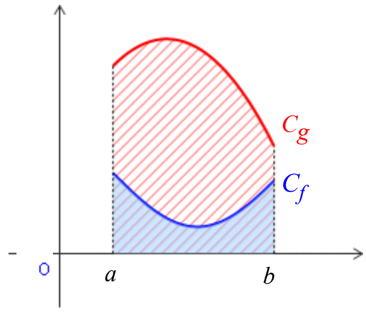
D) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$:

- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a\leqslant b$ on peut intégrer l'inégalité $f\leqslant g$ sur $[a\,;b]$.



Remarque :

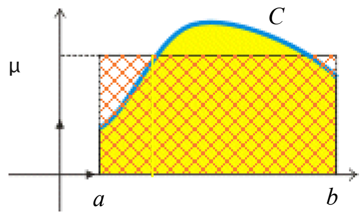
L'inégalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :

E) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le nombre $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.



La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) ÉTUDE DE $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

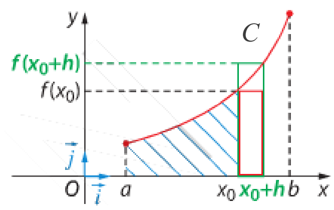
Plus précisément, F est l'unique primitive de f *sur* $[a\,;b]$ s'annulant en a.

Preuve : *idée de preuve (Cas où f est croissante)*

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h\neq 0$ tel que x_0+h est dans $[a\,;b]$ par $T(h)=\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$

Si $h>0$, $F(x_0+h)-F(x_0)$ correspond à l'aire sous la courbe C_f entre x_0 te x_0+h.

(Si $h<0$, on raisonne de même avec $F(x_0)-F(x_0+h)$)



Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$
On a alors :

$$h\,f(x_0)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant h\,f(x_0+h) \Leftrightarrow f(x_0)\leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$$

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0, on en déduit que :
$\lim_{h\to 0} T(h)=f(x_0)$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.
L'unicité résulte du fait que $F(a)=0$.

Remarque :

Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I.

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \qquad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE

Théorème-définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors, pour tous réels a et b de I, la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b, on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$