Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

Calculs d'aires

Intégrale d'une fonction continue et positive
Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 6-1 : ***Vrai ou faux***

1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.

2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.

3) Le résultat de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dépend de x .

4) Si f est une fonction positive et si $a<b$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être strictement négative.

Ex 6-2 :

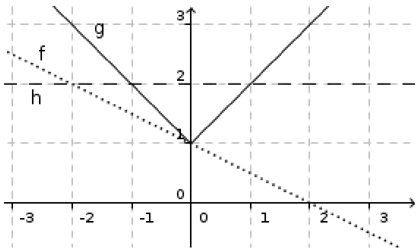
Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a;b]$, puis calculer son intégrale sur $[a;b]$.

1) $f(x)=3x-1$ sur $[2;5]$

2) $f(x)=|x-3|$ sur $[1;4]$

Ex 6-3 : ***À partir d'une représentation graphique***

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1;1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



<u>Ex 6-4 :</u> ***Avec une fonction affine par morceaux***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x\leq 0 \\ x+2 \text{ si } 0<x\leq 2 \\ -\dfrac{3}{2}x+7 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2;4]$.

2) Déterminer $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

<u>Ex 6-5 :</u> ***Avec un demi-cercle***

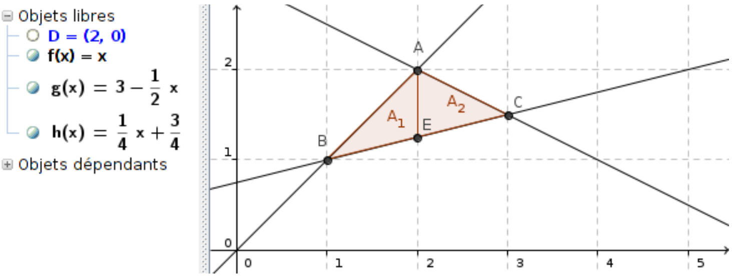
Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.

2) Montrer que C_f est un demi-cercle.

3) Déterminer $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

<u>Ex 6-6 :</u>



1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

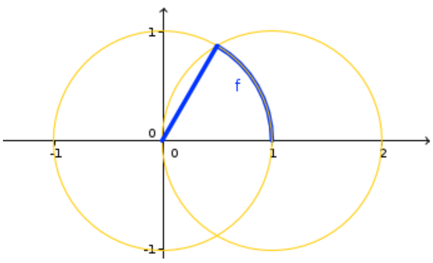
2) En calculant $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x$ déterminer l'aire A_1.

3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

Ex 6-7 :

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)

Déterminer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$



Ex 6-8 : ***Algorithme : sommes de Riemann***

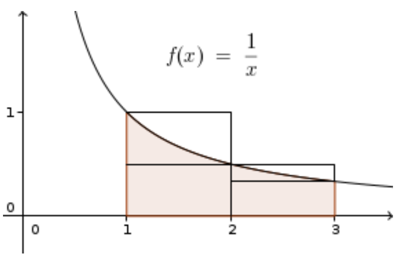
On considère l'algorithme ci-dessous :

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
p=float(input("p="))
s1=1
s2=0
n=1
while (s1-s2>p):
    n=n+1
    s1=0
    s2=0
    for i in range(0,n):
        s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
        s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
print(s1)
print(s2)
```

```
lire,a,b,p
s1←1
s2←0
n←0
tant que (s1-s2)>p faire
  n←n+1
  s1←0
  s2←0
  Pour i allant de 0 à n-1
    s1 ← s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
    s2 ← s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
  Fin pour
Fin tant que
Afficher s1,s2
```

1) On choisit $p=0,1$.
Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?

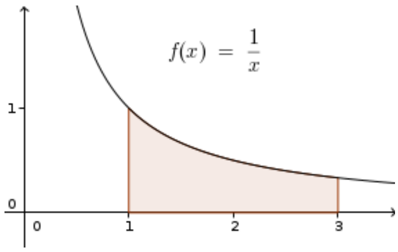
À quoi correspond cette aire ?



La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme.

Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s1 et s2.

2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s1 et s2 au début de l'algorithme

4) Faire tourner le programme et déterminer ce qu'il renvoie pour p=0,01

Propriétés de l'intégrale

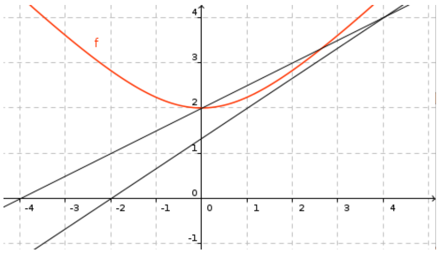
Ex 6-9 : ***Encadrer une intégrale***

1) Démontrer que pour tout $x\in[0;1]$, on a $1\leqslant e^{x^2}\leqslant e$, puis en déduire un encadrement de $I=\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

2) Démontrer que pour tout $x \in [0;8]$, on a $1 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 3$, puis en déduire un encadrement de $J = \int_0^8 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{4+x^2}$.

En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$



Ex 6-10 : ***Encadrer une intégrale - Relation de Chasles***

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

On pose $I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.
En déduire un encadrement de I.

3) Démontrer que :
- $\forall x \in [-1;0]$, $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$
- $\forall x \in [0;1]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

En déduire un nouvel encadrement de I.

On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 … et obtenir des encadrements de plus en plus fin de I … l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'ex 8 !

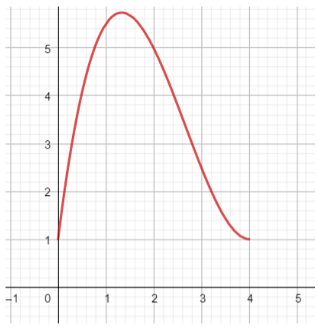
Valeur moyenne

Ex 6-11 : ***Estimation graphique***

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[0;4]$ par

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x + 1$

1) Estimer graphiquement la valeur moyenne de f sur $[0;4]$.



2) Calculer la valeur moyenne de f , puis vérifier le résultat obtenu à la question 1.

Ex 6-12 : ***Vitesse moyenne***

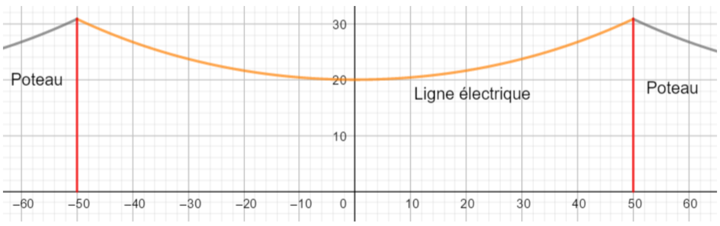
Un mobile se déplace à la vitesse $v(t)=2t^2+5t$ (t en seconde et $v(t)$ en $m\,.\,s^{-1}$).

Quelle est la vitesse moyenne sur le trajet entre les instants 0 et 100 s ?

Ex 6-13 : ***ligne électrique***

La hauteur d'une ligne électrique entre deux poteaux longue de 100 m est modélisée, par la fonction h définie sur $[-50,50]$ par :

$$h(x)=10\left(e^{\frac{x}{50}}+e^{-\frac{x}{50}}\right)$$



Déterminer (à 10^{-2} près) la hauteur moyenne de la ligne électrique.

Ex 6-14 : ***Valeur moyenne et suites***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=e^{-x}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n;n+1]$.
1) Donner l'expression de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n;n+1]$, $e^{-(n+1)}\leqslant e^{-x}\leqslant e^{-n}$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive

Ex 6-15 :

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$

2) $\int_{-1}^1 x^4(x^5-1)\,dx$

3) $\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}}\,du$

4) $\int_0^1 e^x(e^x+9)\,dx$

Ex 6-16 : ***Décomposition en éléments simples***

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0;5]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

1) Démontrer que f est continue et positive sur $\mathrm{I}=[0;5]$.

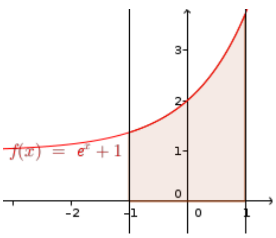
2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$.

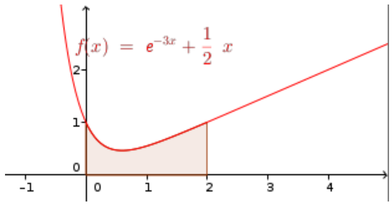
3) En déduire $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

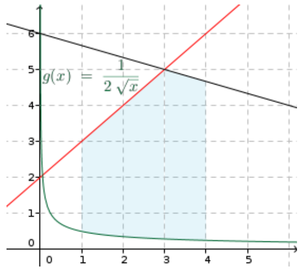
Ex 6-17: ***Calculs d'aires***

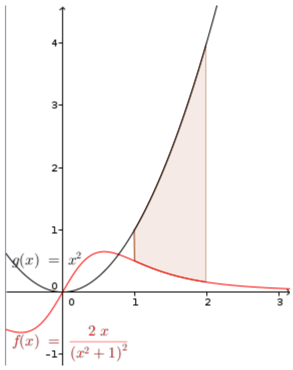
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

Remarque : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$









Ex 6-18 : ***Une primitive de la fonction ln***

Soit F et G deux fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x)=x\ln(x)-x$.

1) Démontrer que F et G sont dérivables sur $[1;+\infty[$ et calculer leur dérivée.

2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k$.

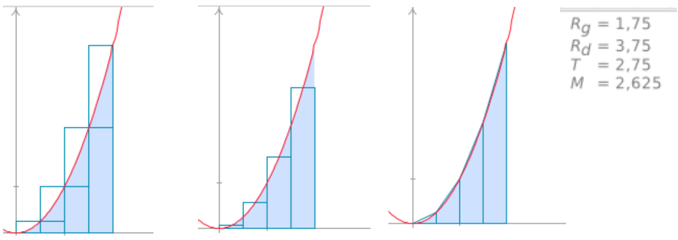
3) Calculer k .

4) Calculer $\int_1^e \ln(t)\,\mathrm{d}t$

Ex 6-19 : *Différentes méthodes d'approximation*

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

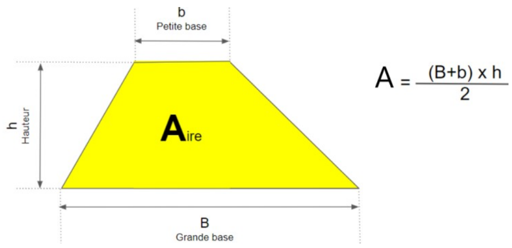
1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente.

2)

Rappel :



Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il applique la méthode des trapèzes (avec 10 trapèzes) à $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

```
def f(x):
    return ( ......... )

def MethodeTrapeze(a, b, N):
    pas = .........
    x = .........
    Aire =  .........
    for i in range(N):
        AireTrapeze = .........
        Aire = .........
        x = .........
    return Aire

print(MethodeTrapeze(1,2,10))
```

3) Calculer $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ et comparer avec l'approximation obtenue.

4) a) Tester le programme **MethodeTrapeze**.py (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode des trapèzes dessinée avec 10 trapèzes.

b) Modifier le programme pour visualiser la méthode des trapèzes avec 12 trapèzes pour calculer $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\,\mathrm{d}x$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 6-20 : *Vrai ou faux*

1) Si f est une fonction négative et si $a<b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.

2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.

3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.

4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ est fausse.

Ex 6-21 : *Propriétés de l'intégrale*

Soit a et b des nombres réels tels que $a<b$, f et g des fonctions continues sur $[a;b]$.

On pose $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

1) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$

3) $c \in [a;b]$, $\int_b^c g(x)\ \mathrm{d}x$ - $\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$

4) $\int_a^b -3x+\frac{2}{3}g(x)\ \mathrm{d}x$

<u>Ex 6-22 :</u> ***Calculer une intégrale avec une primitive***

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{e}^x-1}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\mathrm{d}x$

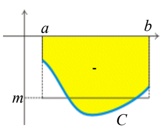
2) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$

3) $\int_1^2 \left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$

<u>Ex 6-23 :</u> ***Calculs d'aires***

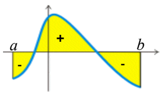
Propriété :

Si f est **<u>une fonction continue et négative</u>** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
On dit parfois que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est <u>l'aire algébrique</u> du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, et négative si f est négative sur $[a;b]$

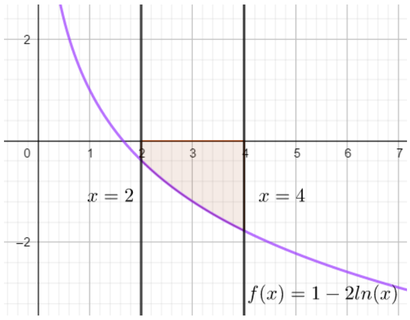


Propriété :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



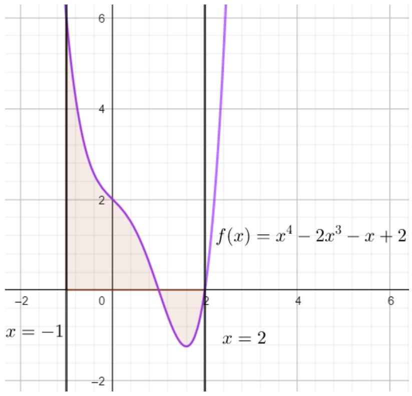
1) Déterminer l'aire A (en unité d'aire) du domaine colorié.
Utiliser le résultat de l'Ex 18



2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-2x^3-x+2$

a) Calculer $f(1)$

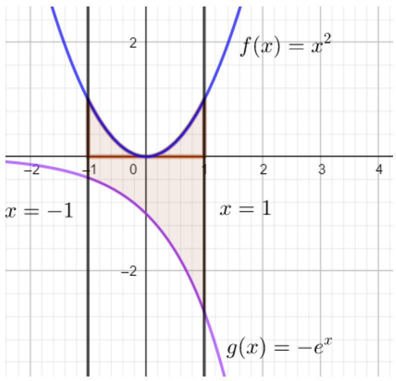
b) Déterminer l'aire A (en unité d'aire) du domaine colorié.



3) Déterminer l'aire A (en unité d'aire) du domaine colorié .

<u>Aide :</u>

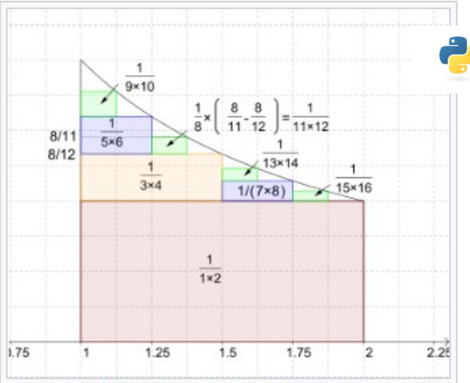
En translatant du vecteur $k\vec{j}$ (avec k suffisamment grand), les deux courbes, tout devient positif et l'aire cherchée est inchangée . On a alors :



$$\int_a^b f(x)+k\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)+k\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x$$

Problèmes et algorithmes

Ex 6-24 : ***Une approximation de ln(2) - Algorithme de Brouncker***



Approximation de $\ln(2)$ par dichotomie selon la méthode de William Brouncker

En 1668, William Brouncker publie le développement en série de ln(2), résultat qu'il a établi dès 1657 en découpant l'aire sous l'hyperbole en rectangles venant boucher les trous par dichotomie :

$$\ln(2)=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)\times(2k+2)}+\ldots$$

En utilisant cette formule, compléter le programme ci-dessous écrit en Python afin d'obtenir une approximation de ln(2) pour $k=100$:

```
def Brouncker ( N ):
    Ln_2 = ……
    ………………………………………
        Ln_2 = ………………………………
    return Ln_2

print(Brouncker(100))
```

Ex 6-25 : ***Méthode Monte-Carlo - Une approximation de ln(2)***

Exemple pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2\,dx$

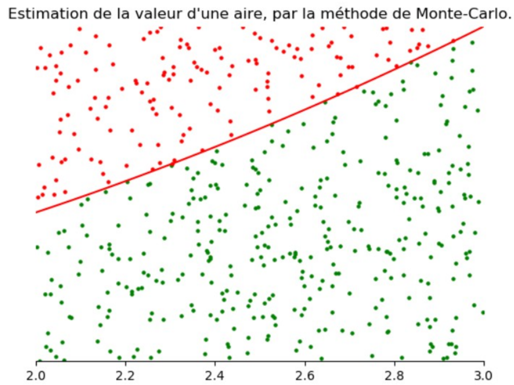
Cette méthode repose sur la loi des grands nombres.
- On définit un rectangle R de cotés [2 ;3]×[0 ; y_{max}] tel que $0\leqslant x^2\leqslant y_{max}$ pour tout $2\leqslant x\leqslant 3$

- On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.

1) Déterminer y_{max}

2) Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de la fonction carrée ?

3) Que nous dit la loi des Grands Nombres ?



4) Le programme ci-dessous écrit en Python permet d'appliquer la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2\,dx$ avec $n=1000$.

```
from random import uniform

def f(x):
    return (x**2)

def MethodeMonteCarlo(a, b, yMax, n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        x = uniform(a,b)
        y = uniform(0,yMax)
        if (f(x) >= y):
            compteur = compteur + 1

    Aire = yMax * (b - a) * compteur / n
    return Aire
print(MethodeMonteCarlo(2,3,9,1000))
```

a) Testez le programme **MethodeMonteCarlo**.py (ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Monte-Carlo et vérifier qu'on obtient une bonne approximation de $\frac{19}{3}$.

b) Modifier quelques lignes de ce programme pour obtenir une approximation de ln(2).

Ex 6-26 : *Baccalauréat ES Métropole sept 2018 ex 4*

Recette totale : fonction ln – valeur moyenne

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2\ln(x).$$

a. Montrer que, pour tout $x \in [1 ; 5]$,

$$r'(x) = \frac{x+2}{x}$$

b. Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

3. **a.** Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 5]$, puis donner une valeur approchée de α au millième.

b. Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.

4. **a.** Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$.
Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par

$$G(x) = 2x[\ln(x) - 1]$$

est une primitive de la fonction g.

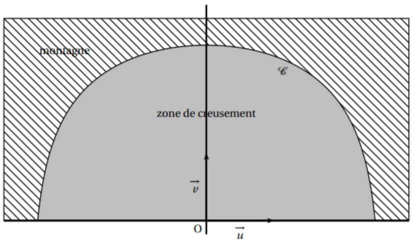
b. En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

c. Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

Ex 6-27 : *Baccalauréat S Pondichéry Avril 2017 ex 3*

Zone de creusement : fonction ln – aire - algorithme somme rectangles

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\,;\,2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5\,;\,2,5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\,;\,2,5]$. En déduire le signe de f sur $[-2,5\,;\,2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a.
   On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.
   a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
   Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
   b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

```python
from math import log
def f(x):
    y=log(-2*x**2+13.5)
    return(y)
S=0
n=int(input("n="))
for k in range(1,n+1):
    r=2.5/n*f(2.5/n*k)
    S=S+r
print(S)
```

Initialisation	$S = 0$, $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	...	...
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	...
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	...	...
Affichage	$S = \ldots$		