

INTÉGRALES

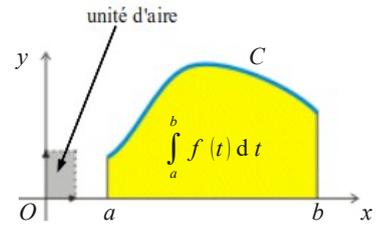
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(t)dt$ ".

- La variable t est appelée variable "muette".

On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

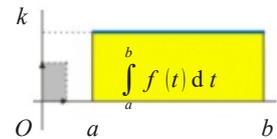
Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm^2 .

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a; b]$ le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemples :

- Si $a=b$, alors $\int_a^b f(t) dt = 0$.

- Pour $k > 0$, $\int_a^b k dt = k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.

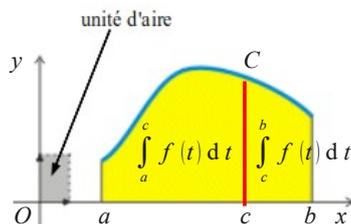


B) RELATION DE CHASLES

Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. On a :

- $\int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$

- $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

D.) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

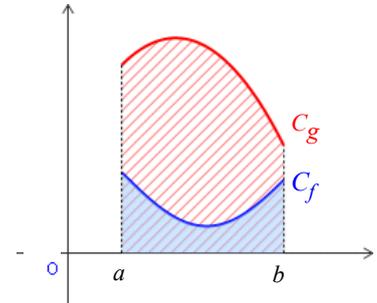
Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$:

- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a \leq b$ on peut intégrer l'inégalité $f \leq g$ sur $[a; b]$.

Remarque :

L'inégalité $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :



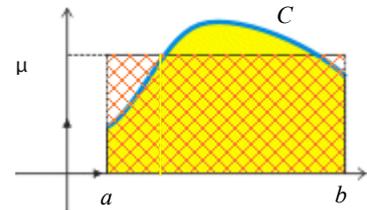
E.) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b .

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t) dt$.



2.) ÉTUDE DE $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a .

Preuve : idée de preuve (Cas où f est croissante)

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans $[a; b]$ par $T(h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$

Si $h > 0$, $F(x_0+h) - F(x_0)$ correspond à l'aire sous la courbe C_f entre x_0 et x_0+h .

(Si $h < 0$, on raisonne de même avec $F(x_0) - F(x_0+h)$)

Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$

On a alors :

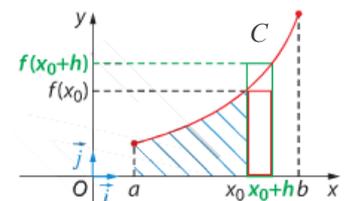
$$h f(x_0) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq h f(x_0+h) \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0 , on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f(x_0)$$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

L'unicité résulte du fait que $F(a) = 0$.



Remarque :

Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I .

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE

Théorème-définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous réels a et b de I , la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t) dt$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b , on a : $\int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0$

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$