

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

1) LOI UNIFORME DISCRÈTE

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1;2;3;\dots;n\}$.

On dit que X suit la **loi uniforme** sur $\{1;2;3;\dots;n\}$ si pour tout $k \in \{1;2;3;\dots;n\}$

$$P(X=k) = \frac{1}{n}$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;3;\dots;n\}$.

L'espérance mathématique de X vaut $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Preuve :

$$\text{On a : } E(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$$

$$\text{Or on sait que : } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On en déduit que :

$$E(X) = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

2) LOI BINOMIALE

A) EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n \in \mathbb{N}^*$) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Remarque : Lors de tirages successifs avec remise, les expériences sont indépendantes.

Propriété :

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

B) SCHEMA DE BERNOULLI

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve ayant deux éventualités :

l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité \bar{S} avec la probabilité $1 - p$.

L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, \bar{S} étant alors "l'échec".

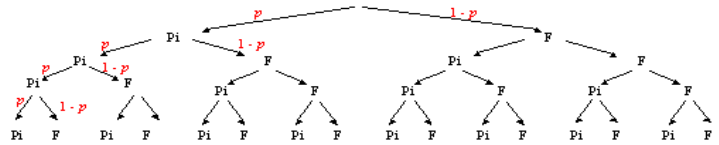
- L'espérance vaut p

- La variance vaut $p(1-p)$

- L'écart type vaut $\sqrt{p(1-p)}$

Exemple :

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".



Notons $P(Pi) = p$ et $P(F) = 1 - p$
(si la pièce est équilibrée, on a $P(Pi) = \frac{1}{2}$ et $P(F) = \frac{1}{2}$).

On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.
L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets (un quadruplet est une liste de 4 éléments) de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi ; Pi ; F ; Pi)$ est $p \times p \times (1 - p) \times p = p^3 (1 - p)$

La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :

$$\{(Pi ; Pi ; Pi ; F) ; (Pi ; Pi ; F ; Pi) ; (Pi ; F ; Pi ; Pi) ; (F ; Pi ; Pi ; Pi)\}$$

Elle est égale à $4 \times p^3 (1 - p)$

Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois Pi dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre réalisant 3 succès pour 4 répétitions.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et on a justifié que $P(X = 3) = 4 \times p^3 (1 - p)$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$p^0 (1 - p)^4$	$4 p^1 (1 - p)^3$	$6 p^2 (1 - p)^2$	$4 \times p^3 (1 - p)$	$p^4 (1 - p)^0$

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque :

On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès)

C) COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans l'exemple précédent, on a chaque fois déterminé le nombre de chemins de l'arbre réalisant k ($k \in \mathbb{N}$ et $k \leq 4$) succès pour 4 répétitions.
De façon plus générale,

Définition :

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès ($k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$) pour n répétitions est le nombre noté $\binom{n}{k}$.
On l'appelle **coefficient binomial**. $\binom{n}{k}$ Se lit " k parmi n ".

Propriétés :

- Pour tout entier naturel n , et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$
- De plus, si $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n - 1$, alors : $\binom{n + 1}{k + 1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1}$

D) TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{k}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

- $\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k \leq n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n} = 1$
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0} = 1$
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
 « Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »

E) LOI BINOMIALE

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p .

Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par : pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

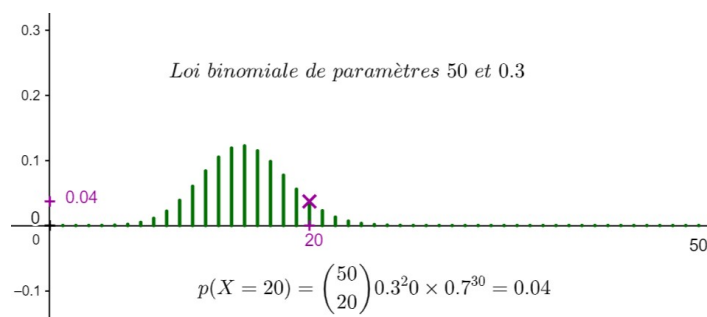
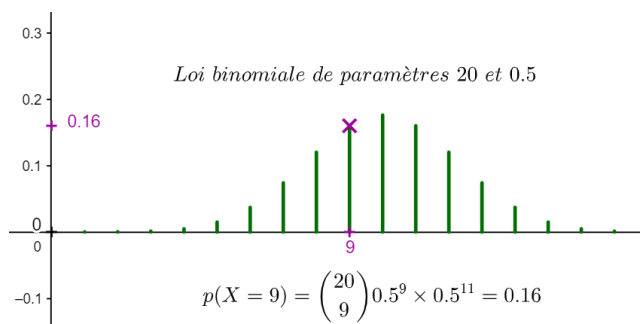
Définition :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0 ; 1 ; \dots ; n\}$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Cette loi est parfois notée $B(n ; p)$

Exemples : http://pierrelux.net/documents/cours/tcomp2020/8_lois_probab_discretes/Loi_binomiale.html



Propriété :

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X) = np$ et pour variance $V(X) = np(1-p)$

Ce qui donne pour l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

3) LOI GÉOMÉTRIQUE

Définition et propriété :

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$.

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p . On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès.

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

Cette loi est parfois notée $G(p)$

Pour tout entier $k \neq 0$, $P(X=k) = p \times (1-p)^{k-1}$

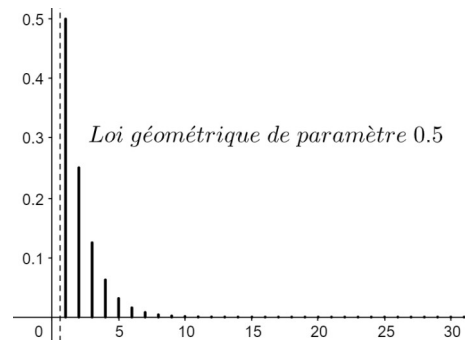
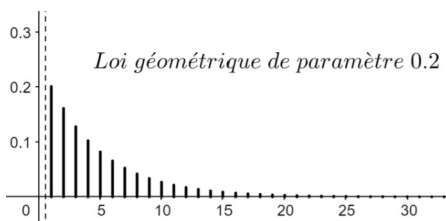
Preuve :

On répète l'épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir le premier succès.

Avant le premier succès, il y a bien sûr $k-1$ échecs.

Comme les répétitions sont indépendantes, on effectue le produit des probabilités des $k-1$ échecs et du succès.

Exemples : http://pierrelux.net/documents/cours/tcomp2020/8_lois_probab_discretes/loi_geometrique.html



Propriété : Loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .

Pour tous entiers naturels k et m non nuls, on a :

$$P_{X>k}(X > k+m) = P(X > m)$$

Remarque :

On dit que X est sans mémoire, ce qui signifie que la probabilité que X prenne des valeurs supérieures à $k+m$ sachant que X est supérieure à k ne dépend pas de k , mais seulement de m .

Propriété :

La loi géométrique de paramètre p a pour espérance mathématique $E(X) = \frac{1}{p}$ et pour variance $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Ce qui donne pour l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$