LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

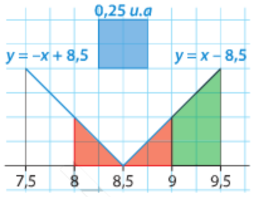
Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

1) NOTION DE DENSITÉ

Exemple d'introduction :

Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30 .



On considère X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture .

On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1\,;t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre, et les droites d'équations $x=t_1$, et $x=t_2$, parallèles à l'axe des ordonnées.

Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge : $P(X\in[8\,;9])=0{,}25$,

La probabilité qu'il arrive entre 9h et 9h30 est : $P(X\in[9\,;9{,}5])=\int_9^{9{,}5}(x-8{,}5)\,\mathrm{d}x=0{,}375$

Rappel :

$|x-8{,}5|=\begin{cases}x-8{,}5 \text{ si } x\geqslant 8{,}5\\ -x+8{,}5 \text{ si } x\leqslant 8{,}5\end{cases}$

Enfin. on vérifie (et c'est indispensable) que : $P(X\in[7{,}5\,;9{,}5])=\int_{7{,}5}^{9{,}5}|x-8{,}5|\,\mathrm{d}x=1$

On dit que la fonction $x\longmapsto |x-8{,}5|$ est la **densité** de la variable aléatoire X.

Remarque : Les valeurs plus ou moins grandes prises par la fonction sur les différents intervalles donnent plus ou moins de poids à la probabilité de cet intervalle . Ce qui explique le nom de « densité » donné à la fonction.

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I, s'il existe une fonction f :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques réels) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X\in J)=\int_J f(t)\,\mathrm{d}t$

f est appelée **densité** de X.

- Si $I=[a\,;b]$:

$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

- Si $I=[a\,;+\infty[$:

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on a :

$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarques :

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)

  Ainsi si $J\subset I$, $K\subset I$ et $J\cap K=\varnothing$ alors $P(X\in J\cup K)=P(X\in J)+P(X\in K)$

- La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I :

$$P(X=a)=P(X\in[a\,;a])=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

- On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a<b$:

$P(X\in[a\,;b])=P(X\in[a\,;b[)=P(X\in]a\,;b])=P(X\in]a\,;b[)$ et $P(X>a)=P(X\geqslant a)$, etc ...

Remarque : On peut utiliser indifféremment les variables x ou t pour définir une densité . Il faut absolument les différencier si on a besoin d'une variable dans une borne d'une intégrale. On ne peut pas écrire $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Il faut écrire $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

2) FONCTION DE RÉPARTITION

Définition :

Soit une variable aléatoire X de densité f .

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F définie pour tout réel t par :

$$F(t)=P(X\leqslant t)$$

Propriété :

Soit une variable aléatoire X de densité f et de fonction de répartition F .

- Pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a :

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)$$

- En tout réel t où la fonction de répartition est dérivable, on a $F'(t)=f(t)$.

3) PARAMÈTRES

Définition :

Soit une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $I=[a;b]$.

L'espérance de X est $E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

- Si $I=[a;+\infty[$, l'espérance de X est (si elle existe) $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $I=]-\infty;b]$, l'espérance de X est (si elle existe) $E(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

Définition :

Soit une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $I=[a;b]$.

La variance de X est $V(X)=\int_a^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

L'écart type de X est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

- Si $I=[a;+\infty[$, la variance de X est (si elle existe) $V(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $I=]-\infty;b]$, la variance de X est (si elle existe) $V(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

4) LOI UNIFORME

Définition :

La loi uniforme sur $[a\,;b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par la fonction constante :

$$f:t\longmapsto\frac{1}{b-a}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.

Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a :

$$P(X\in[c\,;d])=\frac{d-c}{b-a}$$

Cette formule est à rapprocher de la formule :

$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

Remarque : La probabilité $P(X\in[c\,;d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c\,;d]$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\ ;b]$.

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

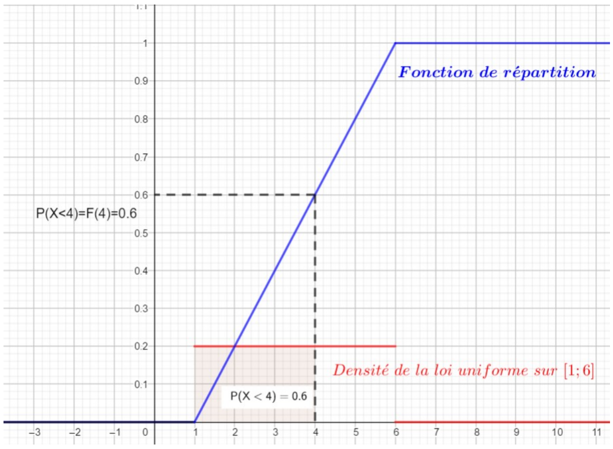
$$F(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<a \\ \dfrac{t-a}{b-a} \text{ si } t\in[a\,;b] \\ 1 \text{ si } t>b \end{cases}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

Exemple :

Représentation de la densité et de la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[1;6]$

$$P(X<4)=P(1\leqslant X\leqslant 4)=\frac{4-1}{6-1}=\frac{3}{5}=0,6$$



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\ ;b]$.

On a $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Preuve de E(X) dans la feuille d'exercices

5) LOI EXPONENTIELLE

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.

La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f: t\longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda\in\mathbb{R}_+^*$**)**.

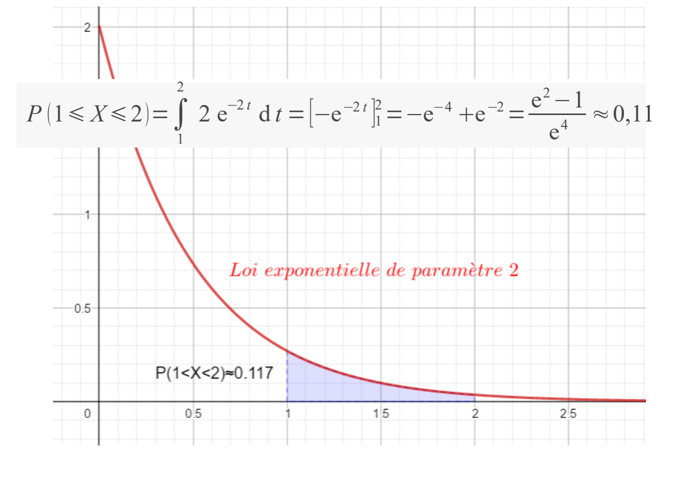
- Pour tout intervalle $[c\ ;d]$, tel que $0\leqslant c\leqslant d$, on a :
$$P(X\in[c\,;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$

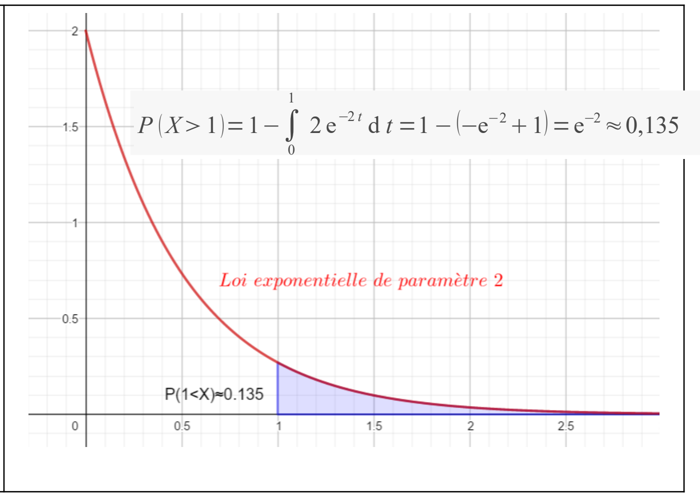
Les preuves sont immédiates :

$$\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_c^d \ \ldots$$

Exemples : *On pourra au choix, appliquer directement les formules ou recalculer les intégrales.*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :





Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda\in\mathbb{R}_+^*$).
Pour tous réels positifs s et t, on a :

$$P_{X>s}(X>s+t)=P(X>t)$$

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement

Preuve :

$$P_{X>s}(X>s+t)=\frac{P((X>s+t)\cap(X>s))}{P(X>s)}$$

Or , $(X>s+t)=(X\in]s+t\,;+\infty[)$, $(X>s)=(X\in]s\,;+\infty[)$ et $(X\in]s+t\,;+\infty[)\subset(X\in]s\,;+\infty[)$

Donc , $(X\in]s\,;+\infty[)\cap(X\in]s+t\,;+\infty[)=(X>s+t)$

D'autre part , $P(X>s+t)=e^{-\lambda(s+t)}$ et $P(X>s)=e^{-\lambda s}$

Ainsi , $P_{X>s}(X>s+t)=\dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X>t)$

Signification : Si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

Remarque : Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Propriété :

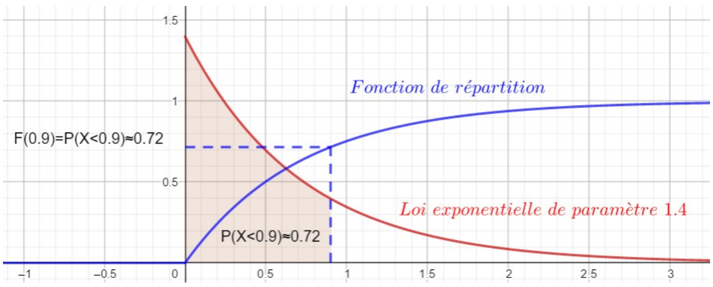
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda\in\mathbb{R}_+^*$).

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

Exemple :



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda\in\mathbb{R}_+^*$).

On a $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

L'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X