# LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

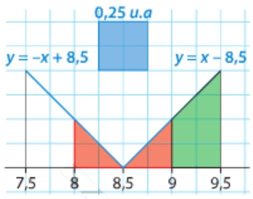
Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

**Exemples :** Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " $X$ prend ses valeurs dans l'intervalle $I$ " .

## 1 ) NOTION DE DENSITÉ

**Exemple d'introduction :**




Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30 .

On considère $X$ la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture .

On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1\,;t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre, et les droites d'équations $x=t_1$, et $x=t_2$ , parallèles à l'axe des ordonnées.

Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge : $P(X\in[8\,;9])=0{,}25$ ,

La probabilité qu'il arrive entre 9h et 9h30 est : $P(X\in[9\,;9{,}5])=\int_9^{9,5}(x-8{,}5)\,\mathrm{d}\,x=0{,}375$

Enfin. on vérifie (et c'est indispensable) que : $P(X\in[7{,}5\,;9{,}5])=\int_{7,5}^{9,5}|x-8{,}5|\,\mathrm{d}\,x=1$

**Rappel :**

$$|x-8{,}5|=\begin{cases}x-8{,}5 \text{ si } x\geqslant 8{,}5\\ -x+8{,}5 \text{ si } x\leqslant 8{,}5\end{cases}$$

On dit que la fonction $x\longmapsto|x-8{,}5|$ est la **densité** de la variable aléatoire $X$.

**Remarque :** Les valeurs plus ou moins grandes prises par la fonction sur les différents intervalles donnent plus ou moins de poids à la probabilité de cet intervalle . Ce qui explique le nom de « densité » donné à la fonction.

**Définition :**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une variable aléatoire $X$ est **continue** (absolument continue ou à densité) sur $I$, s'il existe une fonction $f$ :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques réels) sur $I$
- nulle en dehors de $I$
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}\,t=1$, et telle que pour tout intervalle $J$ inclus dans $I$ : $P(X\in J)=\int_J f(t)\,\mathrm{d}\,t$

$f$ est appelée **densité** de $X$.

- Si $I=[a\,;b]$ :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

- Si $I=[a\,;+\infty[$ :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ existe, on a :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}\,t=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

**Remarques :**

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de $I$ disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)

  Ainsi si $J\subset I$, $K\subset I$ et $J\cap K=\emptyset$ alors $P(X\in J\cup K)=P(X\in J)+P(X\in K)$

- La probabilité que $X$ prenne une valeur isolée de $I$ est nulle. En effet, pour tout réel $a$ de $I$ :

$$P(X=a)=P(X\in[a\,;a])=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

- On en déduit que pour tous réels $a$ et $b$ de $I$, avec $a<b$ :

  $P(X\in[a\,;b])=P(X\in[a\,;b[)=P(X\in]a\,;b])=P(X\in]a\,;b[)$ et $P(X>a)=P(X\geqslant a)$ , etc ...

**Remarque :** On peut utiliser indifféremment les variables $x$ ou $t$ pour définir une densité . Il faut absolument les différencier si on a besoin d'une variable dans une borne d'une intégrale. On ne peut pas écrire $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}\,x$ . Il faut écrire $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x$ ou $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$

## 2 ) FONCTION DE RÉPARTITION

**Définition :**

Soit une variable aléatoire $X$ de densité $f$ .

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire $X$ la fonction $F$ définie pour tout réel $t$ par :

$$F(t)=P(X\leqslant t)$$

**Propriété :**

Soit une variable aléatoire $X$ de densité $f$ et de fonction de répartition $F$ .

- Pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a<b$ , on a :

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)$$

- En tout réel $t$ où la fonction de répartition est dérivable, on a $F'(t)=f(t)$ .

## 3 ) PARAMÈTRES

**Définition :**

Soit une variable aléatoire $X$ de densité $f$ sur un intervalle $I=[a;b]$ .

**L'espérance** de X est $E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

- Si $I=[a;+\infty[$ , l'espérance de X est (si elle existe) $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $I=]-\infty;b]$ , l'espérance de X est (si elle existe) $E(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

**Définition :**

Soit une variable aléatoire $X$ de densité $f$ sur un intervalle $I=[a;b]$ .

**La variance** de $X$ est $V(X)=\int_a^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

**L'écart type** de $X$ est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

- Si $I=[a;+\infty[$ , la variance de X est (si elle existe) $V(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $I=]-\infty;b]$ , la variance de X est (si elle existe) $V(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

## 4 ) LOI UNIFORME

**Définition :**

**La loi uniforme** sur $[a\,;b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction $f$ définie sur $[a\,;b]$ par la fonction constante :

$$f:t\longmapsto\frac{1}{b-a}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.

Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a :

$$P(X\in[c\,;d])=\frac{d-c}{b-a}$$

Cette formule est à rapprocher de la formule :

$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

**Remarque :** La probabilité $P(X\in[c\,;d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c\,;d]$.

**Propriété :**

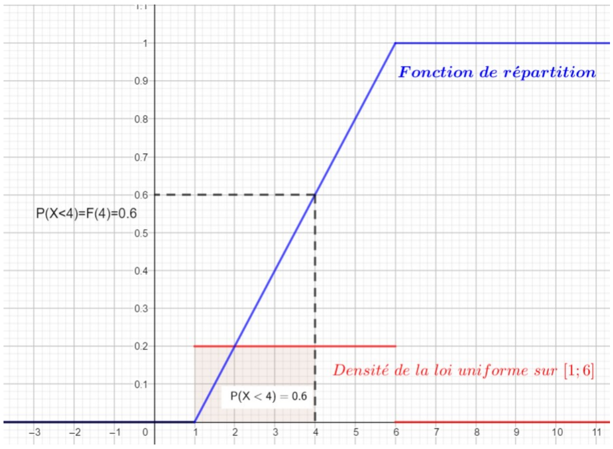
Soit $X$ une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.

La fonction de répartition est la fonction $F$ définie par :

$$F(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<a\\ \dfrac{t-a}{b-a} \text{ si } t\in[a\,;b]\\ 1 \text{ si } t>b\end{cases}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

**Exemple :**




Représentation de la densité et de la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[1;6]$

$$P(X<4)=P(1\leqslant X\leqslant 4)=\frac{4-1}{6-1}=\frac{3}{5}=0,6$$

**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

On a $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ , $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Preuve de E(X) dans la feuille d'exercices

## 5 ) LOI EXPONENTIELLE

**Définition :**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

La **loi exponentielle de paramètre** $\lambda$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f: t\longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** $\lambda$ **(**$\lambda\in\mathbb{R}_+^*$**).**

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0\leqslant c\leqslant d$, on a :
$$P(X\in[c\,;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$

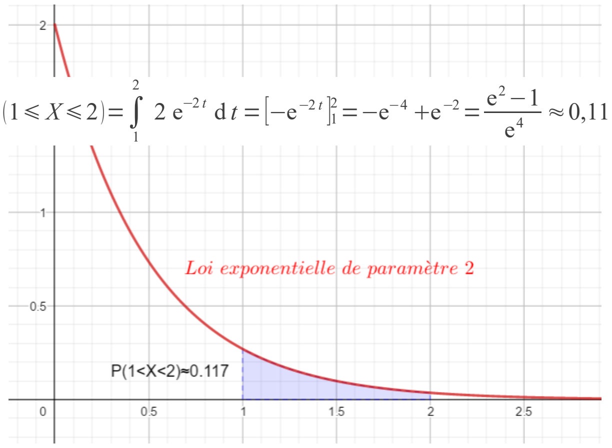
Les preuves sont immédiates :

$\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}=[-\mathrm{e}^{-\lambda t}]_c^d$ ...

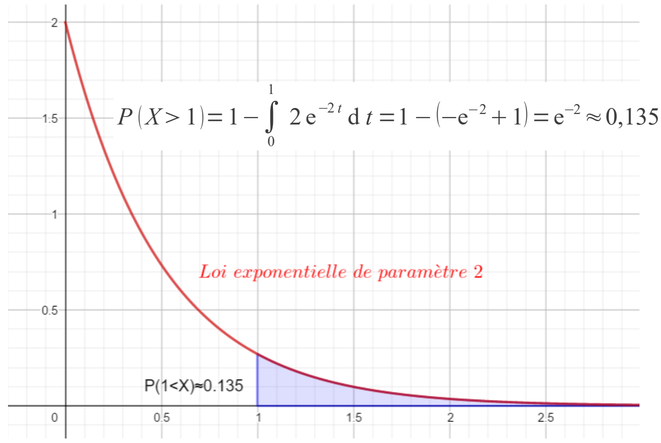
**Exemples :** *On pourra au choix, appliquer directement les formules ou recalculer les intégrales.*

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 2\,e^{-2t}\,dt = \left[-e^{-2t}\right]_1^2 = -e^{-4} + e^{-2} = \frac{e^2-1}{e^4} \approx 0{,}11$$




$$P(X > 1) = 1 - \int_0^1 2\,e^{-2t}\,dt = 1 - (-e^{-2}+1) = e^{-2} \approx 0{,}135$$




**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).
Pour tous réels positifs $s$ et $t$, on a :

$$P_{X>s}(X > s+t) = P(X > t)$$

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement

**Preuve :**

$$P_{X>s}(X > s+t) = \frac{P((X > s+t) \cap (X > s))}{P(X > s)}$$

Or, $(X > s+t) = (X \in ]s+t\,;+\infty[)$, $(X > s) = (X \in ]s\,;+\infty[)$ et $(X \in ]s+t\,;+\infty[) \subset (X \in ]s\,;+\infty[)$

Donc, $(X \in ]s\,;+\infty[) \cap (X \in ]s+t\,;+\infty[) = (X > s+t)$

D'autre part, $P(X > s+t) = e^{-\lambda(s+t)}$ et $P(X > s) = e^{-\lambda s}$

Ainsi, $P_{X>s}(X > s+t) = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

**Signification :** Si par exemple $X$ désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore $t$ années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant $s$ années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins $t$ années après sa mise en service.

**Remarque :** Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

**Propriété :**

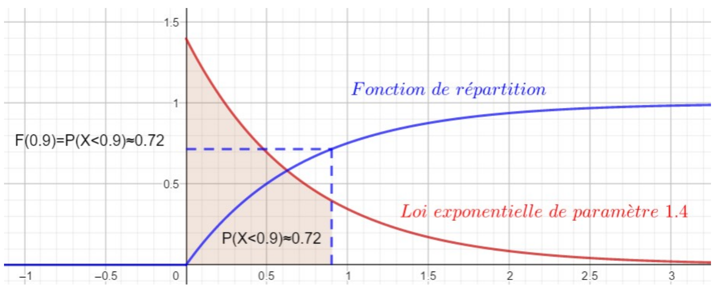
Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

La fonction de répartition est la fonction $F$ définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Preuve dans la feuille d'exercices

**Exemple :**




**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** $\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

On a $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

L'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire $X$