GRAPHES

1) GRAPHES NON-ORIENTÉS

A ; B ; C ; D ; E et F sont 6 poissons.

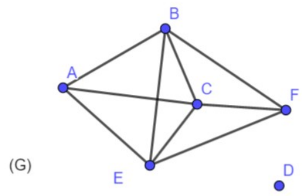
Dans le tableau ci-dessous, une croix indique que
les poissons ne peuvent pas cohabiter dans le même aquarium.

	A	B	C	D	E	F
A		×	×		×	
B	×		×		×	×
C	×	×			×	×
D						
E	×	×	×			×
F		×	×		×	

On peut représenter la situation de la façon suivante :

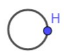
- Chaque poisson est représenté par un point.

- 2 poissons qui ne peuvent pas cohabiter sont reliés

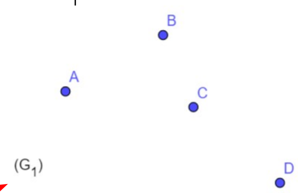


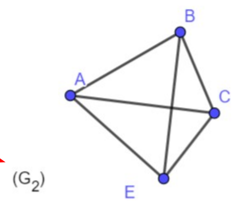
Définitions :

- Un **graphe non-orienté** G est un ensemble de sommets reliés par des arrêtes.
- Les points A ; B ; C ; D ; E et F sont **les sommets** du graphe.
- **L'ordre** d'un graphe est le nombre total de sommets.
- Les segments reliant deux sommets sont **des arêtes**.
- Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.
- Une arête reliant deux sommets est dite **incidente** à ces deux sommets.
- Une arête est une **boucle** si elle relie un sommet à lui-même.



- **Le degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. (Une boucle compte double)
- Un sommet est **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet.
- Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- **Un sous graphe** (G') de (G) est un graphe composé de certains sommets et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.
- Un graphe (G) ou un sous graphe (G_1) de (G) est **stable** lorsqu'il ne contient aucune arête.
- Un graphe (G) ou un sous graphe (G_2) de (G) est **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents.





Exemple :

Propriété :

- La somme S des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes a du graphe. $S=2\times a$
- Dans un graphe simple non-orienté le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exemple :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré						

2) PARCOURIR UN GRAPHE NON-ORIENTÉS

A) CHAÎNE

Définitions :

- **Une chaîne** d'un graphe est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant.
- **La longueur** d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- **Une chaîne est fermée** lorsque son origine et son extrémité sont confondues.
- **Un cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
- Un graphe est **connexe** si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.
- **La distance** entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes qui les relient.
- **Le diamètre d'un graphe** est la plus grande distance (par le plus court chemin) entre deux sommets.

Exemple :

- La chaîne C-D-E-F-G est une chaîne de longueur

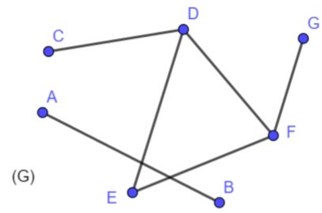
- E-D-G

- La chaîne C-D-E-F-D-C

- Le graphe (G) est d'ordre

- La chaîne E-D-F-E est un cycle de longueur

- La distance entre les sommets C et E vaut   Le diamètre du graphe (G) vaut

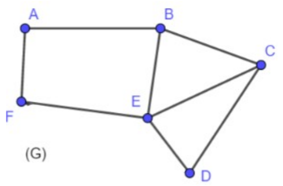


B) CHAÎNE EULÉRIENNE

Définitions :

- Une chaîne est **eulérienne** lorsqu'elle contient une et une seule fois chaque arête du graphe.
- **Un cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée.

Exemple :



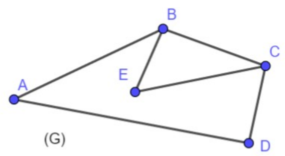
Théorème d'Euler : (admis)

Dans la cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.

Conséquences :

- Pour qu'un graphe connexe (G) admette un cycle eulérien, il faut et il suffit que tous les sommets de (G) soient de degré pair.
- Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, alors ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.
- Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

Exemple :



3) GRAPHES ORIENTÉS

Définitions :

- **Un graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées.
- Le sommet A et le sommet B d'une arête orientée reliant A à B s'appellent respectivement **l'origine** et **l'extrémité** de l'arête orientée A – B.
- On parle de **degré entrant** pour indiquer le nombre d'arcs se dirigeant vers le sommet et de **degré sortant** pour indiquer le nombre d'arcs partant du sommet.
- **Une chaîne orientée** d'un graphe orienté est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit relié au suivant par l'arête orientée dont il est l'origine.

Dans la cas d'un graphe orienté, les arêtes sont aussi appelées **arcs** .

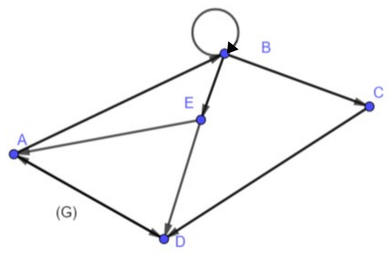
Exemple :

- (G) est un graphe orienté d'ordre

- L'arête orienté C-D a pour

- L'arête orienté

- Il y a reliant les sommets A et D.

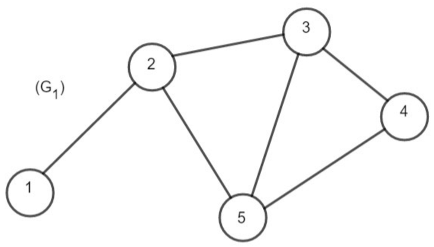


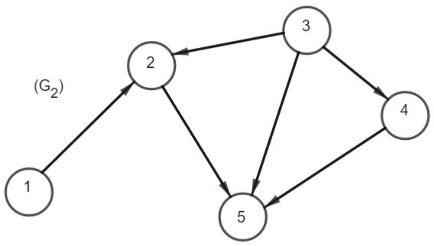
Remarque :
Hormis la notion de graphe complet et le théoème d'Euler, les définitions et les propriétés précédentes sont identiques pour les graphes orientés.

Définition :

On numérote les sommets d'un graphe orienté (G) d'ordre n .
La matrice carrée associée au graphe (G) (orienté ou non) est la matrice à n lignes et à n colonnes où le terme a_{ij} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i à j .
Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence** du graphe.

Exemple :





La matrice d'adjacence de (G_1) est

La matrice d'adjacence de (G_2) est

Remarque :
La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est le nombre d'arêtes reliant la sommet i au sommet j est bien sûr égal au nombre d'arêtes reliant le sommet j au sommet i .

Propriété :

Soit M la matrice d'ordre n associée à un graphe (G) et un entier naturel non nul k .
Le terme de la matrice M^k situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j .

Preuve : ***exigible***

Soit la propriété $P(k)$: "Le terme de la matrice M^k situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j ", pour $k \geq 1$ (HR)
Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

Initialisation :
Par définition, le terme a_{ij} de la matrice M situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant i à j . Il est bien égal au nombre de chaînes de longueur 1 reliant i à j .
P(1) est donc vraie.

Hérédité :
Supposons $P(k)$ vraie pour un entier $k \geq 1$ fixé, c'est à dire, le terme (que nous notons ici b_{ij}) de la matrice M^k situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j

Montrons que la propriété P(k+1) est vraie, c'est à dire , Le terme (que nous notons ici c_{ij}) de la matrice M^{k+1} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur $k+1$ reliant le sommet i au sommet j

Puisque $M^{k+1}=M\times M^k$, alors $c_{ij}=a_{i1}\times b_{1j}+\ldots+a_{iq}\times b_{qj}+\ldots+a_{in}\times b_{nj}$.
- Si $a_{iq}\times b_{qj}\neq 0$, alors $a_{iq}=1$ et $b_{qj}=s$ où s est le nombre non nul de chaînes de longueur k reliant q à j .
Il existe alors s chaînes de longueur $k+1$ reliant i à j et dont le deuxième sommet est q .

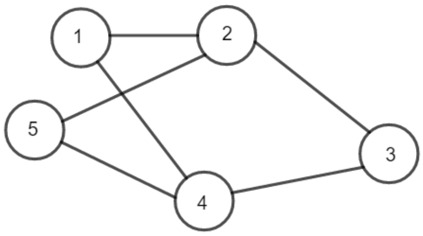
- Si $a_{iq}\times b_{qj}=0$, alors $a_{iq}=0$ ou $b_{qj}=0$. Il n'existe pas de chaîne de longueur $k+1$ reliant i à j et dont le deuxième sommet est q .
En considérant un à un les nombres q , c_{ij} est le nombre de chaînes de longueur $k+1$ reliant i à j .
$P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion :

Pour tout $k\geqslant 1$, le terme de la matrice M^k situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j

Exemple :

(G)



La matrice d'adjacence de (G) est $M=$

On a $M^2=$ $M^3=$

-

-

-