

MATRICES - QUELQUES UTILISATIONS

1) SUITES DE MATRICES

Définitions :

Soit un entier naturel n .

- On appelle **suite de matrices colonnes** (U_n) , des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.
- On dit que (U_n) **converge** si et seulement si tous ses éléments convergent. La limite de (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme de (U_n) .

On définit de la même manière **une suite de matrices lignes**.

Dans les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Exemple :

- La suite (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} n^3 \\ 2-n \end{pmatrix}$ est une suite de matrices dont les coefficients sont les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par $a_n = n^3$ et $b_n = 2-n$.

La suite (U_n) est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2-n = -\infty$

- La suite (V_n) définie par $V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ n+1 \\ 2+e^{-n} \end{pmatrix}$ est convergente. Sa limite est la matrice $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Propriété :

Si A est une matrice carrée d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes telles que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A U_n$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$$

Preuve :

Soit la propriété $P(n)$: " $U_n = A^n U_0$ ", pour $n \in \mathbb{N}$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

$A^0 = I_p$, $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $U_n = A^n U_0$ (HR)

Montrons que la propriété $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$

On a $U_{n+1} = A U_n = A (A^n U_0)$ (d'après HR)

Ainsi $U_{n+1} = (A A^n) U_0 = A^{n+1} U_0$

On a donc démontré que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$

Exemple :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n - 2b_n \end{cases}$, pour tout entier naturel n .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A U_n$.

On en déduit que $U_7 = A^7 U_0 = \begin{pmatrix} 171 \\ -531 \end{pmatrix}$



Define $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ Terminé

Define $u0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Terminé

$a^7 \cdot u0$ $\begin{bmatrix} 171 \\ -531 \end{bmatrix}$

Propriété et définition : admise

Soit A une matrice carrée d'ordre $p \in \mathbb{N}$, B une matrice colonne à p lignes et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes, telles que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A U_n + B$.

Si la suite (U_n) converge alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant $U = AU + B$.

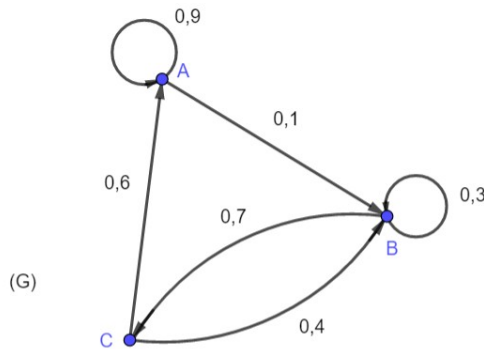
On dit que la matrice U est **l'état stable** de la suite (U_n)

2) CHAÎNES DE MARKOV

Définition :

- **Un graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
- **Le poids** d'une chaîne est la somme des coefficients affectés aux arêtes qui composent la chaîne.
- **Un graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1 et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple : (G) est un graphe probabiliste à trois états.



Définition :

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle **une matrice de transition**.

C'est une matrice carrée d'ordre p telle que le terme de la i -ième ligne et j -ième colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe, 0 sinon.

Si les sommets sont des lettres, on numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique.

Exemple : La matrice de transition du graphe (G) de l'exemple précédent est

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : La somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

Définition :

Soit une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

La loi de probabilité de X_0 (étape 0) s'appelle **la distribution initiale du système**.

La loi de probabilité de X_n (étape n) s'appelle **la distribution après n transitions**.

Si, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n , on dit que la suite (X_n) est une **chaîne de Markov**.

On associe à une chaîne de Markov un graphe probabiliste tel que les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.

3) CHAÎNES DE MARKOV : REPRÉSENTATION À L'AIDE D'UNE SUITE DE MATRICES

Propriété :

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

Soit trois entiers naturels n , i et j tels que $n \geq 1$, $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 2$ (respectivement $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$).

La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i -ème et j -ième colonne de la matrice P^n .

Preuve : Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états.

Soit la propriété $Q(n)$: " $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$ ", pour $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

Pour $n=1$, on a par définition de la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ où $p_{ij} = P_{X_0=i}(X_1=j)$ (avec $i \in \{1;2\}$ et $j \in \{1;2\}$)

$Q(1)$ est donc vraie.

Hérédité :

Supposons $Q(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$ (HR)

Montrons que la propriété $Q(n+1)$ est vraie, c'est à dire $P^{n+1} = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}$

Soit deux entiers naturels i et j tels que $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 2$.

Dans un premier temps, on calcule la probabilité de passer de l'état à i à l'état j en $n+1$ transitions.

(Pour cette démonstration, on utilise le fait que $P_{X_0=i}$ est une probabilité)

$$\begin{aligned} P_{X_0=i}(X_{n+1}=j) &= P_{X_0=i}((X_{n+1}=j) \cap (X_n=1)) + P_{X_0=i}((X_{n+1}=j) \cap (X_n=2)) \quad (\text{D'après la formule des probabilités totales}) \\ &= P_{X_0=i}(X_n=1)P_{X_n=1}(X_{n+1}=j) + P_{X_0=i}(X_n=2)P_{X_n=2}(X_{n+1}=j) \quad (\text{On utilise } P_{X_0=i}(A \cap B) = P_{X_0=i}(A)P_A(B)) \\ &= P_{X_0=i}(X_n=1)p_{1j} + P_{X_0=i}(X_n=2)p_{2j} \quad (\text{car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de } n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } P^{n+1} &= P^n P = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad \text{d'après (HR)} \\ &= \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1)p_{11} + P_{X_0=1}(X_n=2)p_{21} & P_{X_0=1}(X_n=1)p_{12} + P_{X_0=1}(X_n=2)p_{22} \\ P_{X_0=2}(X_n=1)p_{11} + P_{X_0=2}(X_n=2)p_{21} & P_{X_0=2}(X_n=1)p_{12} + P_{X_0=2}(X_n=2)p_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

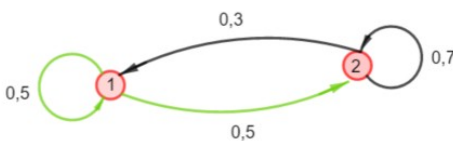
On a donc démontré que $P(n+1)$ est vraie

Conclusion :

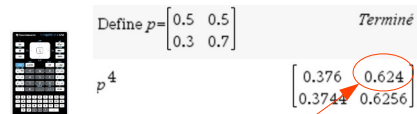
$P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$

Exemple :

On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.

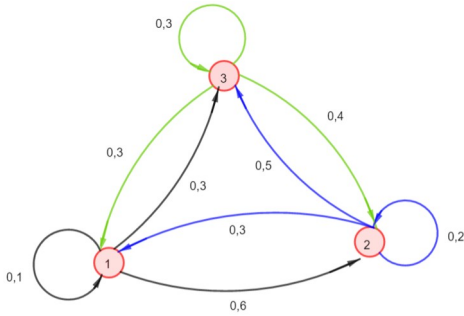


$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$



La probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 4 étapes 0,624

On considère une marche aléatoire à trois états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.



$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Define $p = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$ Terminé



$$p^3 = \begin{bmatrix} 0.244 & 0.396 & 0.36 \\ 0.252 & 0.364 & 0.384 \\ 0.252 & 0.372 & 0.376 \end{bmatrix}$$

La probabilité de passer de l'état 3 à l'état 1 en 3 étapes 0,252

4) CHAÎNES DE MARKOV : ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Définition :

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement 3) colonnes dont le terme de la j -ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égalé à j , c'est à dire :

$$\pi_n = (P(X_n=1) \ P(X_n=2)) \quad (\text{respectivement } \pi_n = (P(X_n=1) \ P(X_n=2) \ P(X_n=3)))$$

Remarque : π_0 représente la distribution initiale et π_n la distribution après n transitions.

Propriété :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.

P^n ne contient pas de 0 signifie qu'en n étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre état.

Preuve : Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états. exigible

Par définition de la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ où $p_{ij} = P_{x_0=i}(X_1=j)$ (avec $i \in \{1;2\}$ et $j \in \{1;2\}$)

Soit un entier naturel n . On a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= P(X_{n+1}=1 \cap X_n=1) + P(X_{n+1}=1 \cap X_n=2) \quad (\text{D'après la formule des probabilités totales}) \\ &= P(X_n=1)P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) + P(X_n=2)P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) \\ &= P_{X_n=1}P(X_{n+1}=1|X_n=1) + P_{X_n=2}P(X_{n+1}=1|X_n=2) \\ &= p_{11}P(X_n=1) + p_{21}P(X_n=2) \quad (\text{car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de } n) \end{aligned}$$

On démontre de même que $P(X_{n+1}=2) = p_{12}P(X_n=1) + p_{22}P(X_n=2)$. On a donc bien $\pi_{n+1} = \pi_n P$

On suppose maintenant $n \geq 1$. On a déjà vu que $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \pi_0 P^n &= (P(X_0=1) \ P(X_0=2)) \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix} \\ &= (P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=1) + P(X_0=2)P_{X_0=2}(X_n=1) \quad P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=2) + P(X_0=2)P_{X_0=2}(X_n=2)) \\ &= (P((X_0=1) \cap (X_n=1)) + P((X_0=2) \cap (X_n=1)) \quad P((X_0=1) \cap (X_n=2)) + P((X_0=2) \cap (X_n=2))) \\ &= (P(X_n=1) \ P(X_n=2)) \\ &= \pi_n \end{aligned}$$

Propriété : admise

S'il existe un entier naturel n tel que P^n ne contient pas de 0 alors la suite (π_n) converge vers la matrice π vérifiant $\pi = \pi P$ et cette limite ne dépend pas de π_0 .

La matrice π représente **la distribution invariante du système**.

Remarque : Si la matrice P ne contient pas de 0, alors la suite (π_n) converge.