MATRICES - QUELQUES UTILISATIONS

1) SUITES DE MATRICES

Définitions :

Soit un entier naturel n .

- On appelle **suite de matrices colonnes** (U_n) , des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.
- On dit que (U_n) **converge** si et seulement si tous ses éléments convergent. La limite de (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme de (U_n) .

On définit de la même manière **une suite de matrices lignes**.

Dans les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Exemple :

- La suite (U_n) définie par $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} n^3 \\ 2-n \end{pmatrix}$ est une suite de matrices dont les coefficients sont les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par $a_n=n^3$ et $b_n=2-n$.

  La suite (U_n) est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-n=-\infty$

- La suite (V_n) définie par $\mathrm{V}_n=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} \\ 2+e^{-n} \end{pmatrix}$ est convergente . Sa limite est la matrice $\mathrm{V}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Propriété :

Si A est une matrice carrée d'ordre $p\in\mathbb{N}$ et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes telles que pour tout entier naturel n , $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$$

Preuve :

Soit la propriété $\mathrm{P}(n)$: " $\mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$ ", pour $n\in\mathbb{N}$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation :

$\mathrm{A}^0=\mathrm{I}_p$, P(0) est donc vraie.

Hérédité :

Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un entier $n\in\mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $\mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$ (HR)

Montrons que la propriété P(n+1) est vraie, c'est à dire $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}^{n+1}\mathrm{U}_0$

On a $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n=\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^n\mathrm{U}_0\right)$ (d'après HR)

Ainsi $\mathrm{U}_{n+1}=\left(\mathrm{A}\mathrm{A}^n\right)\mathrm{U}_0=\mathrm{A}^{n+1}\mathrm{U}_0$

On a donc démontré que P(n+1) est vraie.

Conclusion :

P(n) est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, c'est à dire : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$

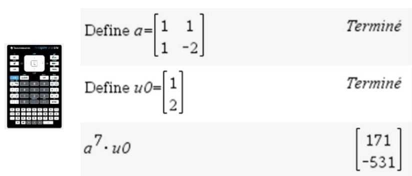
Exemple :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0=1$, $b_0=2$ et $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n-2\,b_n \end{cases}$, pour tout entier naturel n .

On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , on pose $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$.

On en déduit que $\mathrm{U}_7=\mathrm{A}^7\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix} 171 \\ -531 \end{pmatrix}$



Propriété et définition : ***admise***

Soit A une matrice carrée d'ordre $p \in \mathbb{N}$, B une matrice colonne à p lignes et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes, telles que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A\,U_n + B$.

Si la suite (U_n) converge alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant $U = AU + B$.

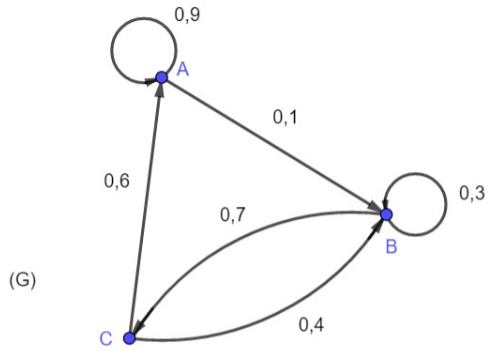
On dit que la matrice U est **l'état stable** de la suite (U_n)

2) CHAÎNES DE MARKOV

Définition :

- **Un graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
- **Le poids** d'une chaîne est la somme des coefficients affectés aux arêtes qui composent la chaîne.
- **Un graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple : (G) est un graphe prababoliste à trois états.



Définition :

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle **une matrice de transition.**

C'est une matrice carrée d'ordre p telle que le terme de la i -ème ligne et j -ième colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe , 0 sinon.

Si les sommets sont des lettres, on numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique.

Exemple : La matrice de transition du graphe (G) de l'exemple précédent est $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : La somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

Définition :

Soit une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

La loi de probabilité de X_0 (étape 0) s'appelle **la distribution initiale du système.**

La loi de probabilité de X_n (étape n) s'appelle **la distribution après *n* transitions**.

Si, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n , on dit que la suite (X_n) est une **chaîne de Markov**.

On associe à une chaîne de Markov un graphe probabiliste tel que les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.

3) CHAÎNES DE MARKOV : REPRÉSENTATION À L'AIDE D'UNE SUITE DE MATRICES

Propriété :

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

Soit trois entiers naturels n , i et j tels que $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ (respectivement $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$).

La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i -ème et j -ième colonne de la matrice P^n .

Preuve : Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états.

Soit la propriété $\mathrm{Q}(n)$: " $\mathrm{P}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=2) \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=2) \end{pmatrix}$ ", pour $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

Pour $n=1$, on a par définition de la matrice de transition $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ où $p_{ij} = \mathrm{P}_{x_0=i}(\mathrm{X}_1=j)$ (avec $i \in \{1;2\}$ et $j \in \{1;2\}$)

Q(1) est donc vraie.

Hérédité :

Supposons $\mathrm{Q}(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $\mathrm{P}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=2) \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=2) \end{pmatrix}$ (HR)

Montrons que la propriété Q(n+1) est vraie, c'est à dire $\mathrm{P}^{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_{n+1}=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_{n+1}=2) \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_{n+1}=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_{n+1}=2) \end{pmatrix}$

Soit deux entiers naturels i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$.

Dans un premier temps, on calcule la probabilité de passer de l'état à i à l'état j en $n+1$ transitions.

(Pour cette démonstration, on utilise le fait que $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}$ est une probabilité)

$\mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{X}_{n+1}=j) = \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}((\mathrm{X}_{n+1}=j) \cap (\mathrm{X}_n=1)) + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}((\mathrm{X}_{n+1}=j) \cap (\mathrm{X}_n=2))$ (D'après la formule des probabilités totales)

$= \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{X}_n=1)\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n=1}(\mathrm{X}_{n+1}=j) + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{X}_n=2)\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n=2}(\mathrm{X}_{n+1}=j)$ (On utilise $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{A})\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$)

$= \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{X}_n=1)\, p_{1j} + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=i}(\mathrm{X}_n=2)\, p_{2j}$ (car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n)

Or $\mathrm{P}^{n+1} = \mathrm{P}^n \mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=2) \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ d'après (HR)

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=1)\, p_{11} + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=2)\, p_{21} & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=1)\, p_{12} + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=2)\, p_{22} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=1)\, p_{11} + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=2)\, p_{21} & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=1)\, p_{12} + \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=2)\, p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_{n+1}=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_{n+1}=2) \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_{n+1}=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_{n+1}=2) \end{pmatrix}$$

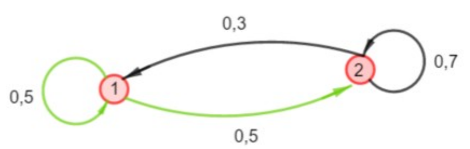
On a donc démontré que P(n+1) est vraie

Conclusion :

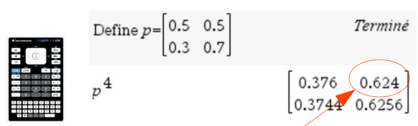
P(n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=1}(\mathrm{X}_n=2) \\ \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=1) & \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0=2}(\mathrm{X}_n=2) \end{pmatrix}$

Exemple :

- On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.

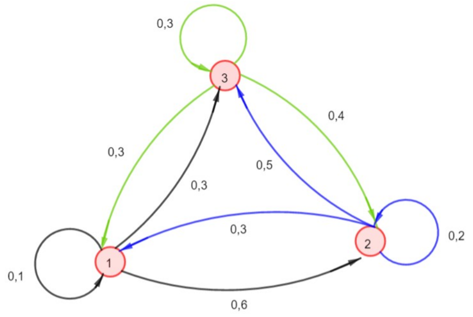


$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$



La probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 4 étapes 0,624

• On considère une marche aléatoire à trois états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.



$$P=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}$$

Define $p=\begin{bmatrix}0.1 & 0.6 & 0.3\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\end{bmatrix}$ *Terminé*

p^3 $\begin{bmatrix}0.244 & 0.396 & 0.36\\ 0.252 & 0.364 & 0.384\\ 0.252 & 0.372 & 0.376\end{bmatrix}$

La probabilité de passer de l'état 3 à l'état 1 en 3 étapes 0,252

4) CHAÎNES DE MARKOV : ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Définition :

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement 3) colonnes dont le terme de la j -ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égalé à j , c'est à dire :

$$\pi_n=\left(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)\right)\quad (\text{ respectivement } \pi_n=\left(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)\quad P(X_n=3)\right)\ )$$

Remarque : π_0 représente la distribution initiale et π_n la distribution après n transitions.

Propriété :

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\pi_{n+1}=\pi_n P$ et $\pi_n=\pi_0 P^n$.

P^n ne contient pas de 0 signifie qu'en n étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre état.

Preuve : ***Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états.*** *exigible*

Par définition de la matrice de transition $P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ où $p_{ij}=P_{x_0=i}(X_1=j)$ (avec $i\in\{1;2\}$ et $j\in\{1;2\}$)

Soit un entier naturel n . On a :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1)&=P(X_{n+1}=1\cap X_n=1)+P(X_{n+1}=1\cap X_n=2)\quad \text{(D'après la formule des probabilités totales)}\\ &=P(X_n=1)P_{X_n=1}P(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)P_{X_n=2}P(X_{n+1}=1)\\ &=P_{X_n=1}P(X_{n+1}=1)P(X_n=1)+P_{X_n=2}P(X_{n+1}=1)P(X_n=2)\\ &=p_{11}P(X_n=1)+p_{21}P(X_n=2)\quad \text{(car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de } n\text{)}\end{aligned}$$

On démontre de même que $P(X_{n+1}=2)=p_{12}P(X_n=1)+p_{22}P(X_n=2)$

On a donc bien $\pi_{n+1}=\pi_n P$

On suppose maintenant $n\geqslant 1$. On a déjà vu que $P^n=\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$.

On a alors
$$\begin{aligned}\pi_0 P^n&=\left(P(X_0=1)\quad P(X_0=2)\right)\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}\\ &=\left(P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=1)+P(X_0=2)P_{X_0=2}(X_n=1)\quad P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=2)+P(X_0=2)P_{X_0=2}(X_n=2)\right)\\ &=\left(P((X_0=1)\cap(X_n=1))+P((X_0=2)\cap(X_n=1))\quad P((X_0=1)\cap(X_n=2))+P((X_0=2)\cap(X_n=2))\right)\\ &=\pi_n=\left(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)\right)\\ &=\pi_n\end{aligned}$$

Propriété : ***admise***

S'il existe un entier naturel n tel que P^n ne contient pas de 0 alors la suite (π_n) converge vers la matrice π vérifiant $\pi=\pi P$ et cette limite ne dépend pas de π_0 .

La matrice π représente **la distribution invariante du système**.

Remarque : Si la matrice P ne contient pas de 0, alors la suite (π_n) converge.