

LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE ALGÈBRE

1) DÉFINITION – FORME ALGÈBRE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note \mathbb{C} un ensemble contenant \mathbb{R} tel que :

- Il existe dans \mathbb{C} un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de \mathbb{C} s'écrit sous la forme $a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de \mathbb{R} , et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z .

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. (\mathbb{R} est contenu dans \mathbb{C})
- Si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- \mathbb{R} correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite. On peut donc toujours comparer deux nombres réels : si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- \mathbb{C} , ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan. Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a; b)$. On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} . On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \frac{a - a'}{b' - b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.

Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.

On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

Définition :

Soit un nombre complexe z .

L'écriture $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

a est appelé **partie réelle** de z , et b **partie imaginaire** de z .

On note $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

Preuve :

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a = \Re(z)$, $a' = \Re(z')$, $b = \Im(z)$ et $b' = \Im(z')$

Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.

Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement :

Si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$

et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

Exemple : Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$$z + z' = \quad \quad \quad z - z' =$$

$$2z - 3z' = \quad \quad \quad z \cdot z' = \quad \quad \quad z^2 =$$

2) DIVISION

Propriété :

Tout nombre complexe non nul z admet un unique inverse noté $\frac{1}{z}$.

Preuve :

On pose $z = x + iy$

Existence : On considère le nombre complexe $z' = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

On a : $zz' =$

Donc z' est bien un inverse de z .

unicité : On considère z'' un autre inverse de z .

On a : $(z'' - z')z =$

Comme $z \neq 0$, on a forcément $z'' - z' = 0$ et donc $z'' = z'$

3) CONJUGUÉ

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté \bar{z} tel que $\bar{z} = a - bi$.

Exemple : Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$$\bar{z} = \quad \quad \quad \bar{z}' = \quad \quad \quad \overline{z + z'} =$$

$$\overline{z + z'} = \quad \quad \quad \bar{z} \cdot \bar{z}' = \quad \quad \quad zz' = \quad \quad \quad \overline{zz'} =$$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$; $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Si $z' \neq 0$ $\frac{1}{z'} = \frac{1}{\bar{z}'}$; $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z}'}$
- $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $\Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $\Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ (z est un imaginaire pur)

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

• $\bar{z} = a - bi$ donc $\overline{\bar{z}} = a + bi = z$

• $z \cdot \bar{z} = ($

- $z + z' = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i$.

- $z - z' = a + bi - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$.

Comme $(a - a')$ et $(b - b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z - z'} = (a - a') + (b - b')i = a - bi - a' + b'i = \bar{z} - \bar{z}'$

- $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$

D'autre part $\bar{z} \cdot \bar{z}' = (a - bi)(a' - b'i) = aa' - ab'i - a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = \overline{zz'}$

- $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ se démontre facilement par récurrence en utilisant $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$ exigible

- Si $z' \neq 0$, $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' + b'i} = \frac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{-b'}{(a'^2 + b'^2)}i$

Comme $\frac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $\frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\frac{1}{z'}} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{b'}{a'^2 + b'^2}$

D'autre part $\bar{z}' = a' - b'i$, donc $\frac{1}{\bar{z}'} = \frac{1}{a' - b'i} = \frac{a' + b'i}{(a' - b'i)(a' + b'i)} = \frac{a' + b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i = \overline{\frac{1}{z'}}$

- Si $z' \neq 0$, $\frac{\bar{z}'}{z'} =$

- $\frac{z + \bar{z}}{2} =$

- $\frac{z - \bar{z}}{2i} =$

- $z = \bar{z} \Leftrightarrow$

- $z = -\bar{z} \Leftrightarrow$

Remarque : La propriété $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Exemples : Méthode de l'expression conjuguée

- L'inverse de $1 - i$ est :

- $\frac{1+i}{2-i} =$

4) LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Propriété : binome de Newton

Soit a et b deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n , on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve :

On note $P(n) : \ll (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \gg$, pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé, c'est à dire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

On a : $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (d'après HR)

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } (a+b)^{n+1} &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \quad \text{On rentre } a \text{ et } b \text{ dans les sommes (on développe)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1+0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{On coupe la somme en deux en isolant le dernier terme} \quad \text{On coupe la somme en deux en isolant le premier terme} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{On pose } s=k+1 \\
 &= \sum_{s=1}^n \binom{n}{s-1} a^s b^{n-(s-1)} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{On remplace } s \text{ par } k \text{ (variable muette)} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{Égalités utilisées dans le triangle de Pascal} \\
 &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
 &\quad \text{Premier terme (} k=0 \text{)} \quad \text{Dernier terme (} k=n+1 \text{)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion :

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple :

$$(1+i)^3 =$$