# LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

## 1 ) DÉFINITION – FORME ALGÉBRIQUE

**Définition :**

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté $i$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$ , où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre $z$.

**Nombres complexes particuliers :**

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ .
- Si $b = 0$ , on a $z = a$ , $z$ est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$ )
- Si $a = 0$ , on a $z = bi$ , on dit que $z$ est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

**Remarques :**
- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel $x$ correspond au point d'abscisse $x$ sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si $x$ et $y$ sont des réels, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (Le point d'abscisse $x$ se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse $y$)
- $\mathbb{C}$ , ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a\,;b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ .
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe $z$ est inférieur à un nombre complexe $z'$ ou qu'un nombre complexe $z$ est positif.

**Propriété :**

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$ , où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

**Preuve :**

Considérons un nombre complexe $z$ s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$ , avec $a$ , $b$ , $a'$ , $b'$ réels.
On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$
Supposons que $b \neq b'$ , on aurait alors $i = \dfrac{a - a'}{b' - b}$ ,
Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$
On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$ , ce qui signifie que $b = b'$ .
Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$ , on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$ .
On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$ . Les deux écritures de $z$ sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

**Définition :**

Soit un nombre complexe $z$.
L'écriture $z = a + bi$ , où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe $z$.
$a$ est appelé **partie réelle** de $z$, et $b$ **partie imaginaire** de $z$.
On note $a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$ .

**Remarques :**
- La partie réelle de $z$ est un nombre réel.
- La partie imaginaire de $z$ est un nombre réel.

**Propriété :**

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si $a$ , $b$ , $a'$ , $b'$ sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'$$

**Preuve :**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ , avec $a$ , $b$ , $a'$ , $b'$ réels.
On a alors $a = \Re e(z)$ , $a' = \Re e(z')$ , $b = \Im m(z)$ et $b' = \Im m(z')$
Si $z = z'$ , alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.
Donc $z$ et $z'$ ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

**Réciproquement :**
Si $z$ et $z'$ ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$
et par conséquent $a + bi = a' + b'i$ , c'est-à-dire $z = z'$

**Exemple :** Soit $z=2+3i$ et $z'=i-5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$z+z'=-3+4i$ $z-z'=7+2i$

$2z-3z'=19+3i$ $z\cdot z'=-13-13i$ $z^2=-5+12i$

## 2 ) DIVISION

**Propriété :**

Tout nombre complexe non nul $z$ admet un unique inverse noté $\frac{1}{z}$.

**Preuve :**

On pose $z=x+iy$

**Existence :** On considère le nombre complexe $z'=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

On a : $zz'=(x+iy)\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{(x-iy)(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$

Donc $z'$ est bien un inverse de $z$.

**Unicité :** On considère $z''$ un autre inverse de $z$.

On a : $(z''-z')z=z''z-z'z=1-1=0$

Comme $z\neq 0$, on a forcément $z''-z'=0$ et donc $z''=z'$

## 3 ) CONJUGUÉ

**Définition :**

Soit $z$ un nombre complexe de forme algébrique $a+bi$.
On appelle **conjugué** de $z$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z}=a-bi$.

**Exemple :** Soit $z=3+5i$ et $z'=-2+3i$. Calculer :

$\overline{z}=3-5i$ $\overline{z}'=-2-3i$ $\overline{z}+\overline{z}'=1-8i$ $z+z'=1+8i$

$\overline{z+z'}=1-8i$ $\overline{z}\cdot\overline{z}'=-21+i$ $zz'=-21-i$ $\overline{zz'}=-21+i$

**Propriétés :**

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\cdot\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z}'$ ; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z}'$ ; $\overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z}'$ ; $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ ( $n\in\mathbb{N}^*$ )
- Si $z'\neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z}'}$ ; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}'}$
- $\Re e(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ ; $\Im m(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$
- $\Im m(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- $\Re e(z)=0 \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\overline{z}$ ( $z$ est un imaginaire pur)

**Preuve :**

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$.

- $\overline{z}=a-bi$ donc $\overline{\overline{z}}=a+bi=z$
- $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$ donc $z\cdot\overline{z}$ est un réel positif

- $z+z'=a+bi+a'+b'i=(a+a')+(b+b')i$ .

  Comme $(a+a')$ et $(b+b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z+z'}=(a+a')-(b+b')i=a-bi+a'-b'i=\overline{z}+\overline{z}'$

- $z-z'=a+bi-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$ .

  Comme $(a-a')$ et $(b-b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z-z'}=(a-a')+(b-b')i=a-bi-a'+b'i=\overline{z}-\overline{z}'$

- $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2 \;=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'}=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i$

  D'autre part $\overline{z}\cdot\overline{z}'=(a-bi)(a'-b'i)=aa'-ab'i-a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i=\overline{zz'}$

- $\overline{z}^n=\overline{z^n}$ se démontre facilement par récurrence en utilisant $\overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z}'$ *exigible*

- Si $z'\neq 0$ , $\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{a'+b'i}=\dfrac{a'-b'i}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\dfrac{a'-b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{-b'}{(a'^2+b'^2)}i$

  Comme $\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}$ et $\dfrac{-b'}{a'^2+b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\dfrac{1}{z'}}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+i\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}$

  D'autre part $\overline{z}'=a'-b'i$, donc $\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{1}{a'-b'i}=\dfrac{a'+b'i}{(a'-b'i)(a'+b'i)}=\dfrac{a'+b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}i=\overline{\dfrac{1}{z'}}$

- *Si* $z'\neq 0$ , $\overline{\dfrac{z}{z'}}=\overline{z\times\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$

- $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{a+bi+a-bi}{2}=\dfrac{2a}{2}=a=\Re\mathrm{e}(z)$ ; $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b=\Im\mathrm{m}(z)$

- $z=\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi \Leftrightarrow a+bi-a+bi=0 \Leftrightarrow 2bi=0 \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow \Im\mathrm{m}(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

- $z=-\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=-a+bi \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow \Re\mathrm{e}(z)=0 \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

**Remarque :** La propriété $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

**Exemples :** Méthode de l'expression conjuguée

- L'inverse de $1-i$ est : $\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$

- $\dfrac{1+i}{2-i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4-i^2}=\dfrac{1+3i}{4+1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

## 4 ) LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

**Propriété : binome de Newton**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes. Pour tout entier naturel $n$ , on a :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

**Preuve :**

On note $\mathrm{P}(n)$ : « $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ », pour $n\in\mathbb{N}$

**Initialisation :**

Pour $n=0$ , on a : $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{0-k}=\binom{0}{0}a^0 b^0=1$

Donc P(0) est vraie.

**Hérédité :**

Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un entier naturel $n$ fixé, c'est à dire $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (HR)

Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$

On a : $(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (d'après HR)

Ainsi $(a+b)^{n+1}=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On rentre *a* et *b* dans les sommes ( on développe )

On coupe la somme en deux en isolant le dernier terme

On coupe la somme en deux en isolant le premier terme

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0+\binom{n}{0}a^0 b^{n+1+0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k}+a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On pose $s=k+1$

$$=\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s-1}a^s b^{n-(s-1)}+a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On remplace *s* par *k* *(variable muette)*

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}$$

Égalité utilisée dans le triangle de Pascal

$$=\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0+\binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$=\underbrace{\binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}}_{\text{Premier terme ( } k=0 \text{ )}}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}+\underbrace{\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0}_{\text{Dernier terme ( } k=n+1 \text{ )}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie

**Conclusion :**

On en déduit que pour tout entier naturel $n$ , on a $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

**Exemple :**

$$(1+i)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}1^k i^{3-k}=\binom{3}{0}1^0 i^{3-0}+\binom{3}{1}1^1 i^{3-1}+\binom{3}{2}1^2 i^{3-2}+\binom{3}{3}1^3 i^{3-3}=i^3+3i^2+3i+1=-i-3+3i+1=-2+2i$$