LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

1) DÉFINITION – FORME ALGÉBRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$)
- Si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :
- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a ; b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.
On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$
Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \dfrac{a - a'}{b' - b}$,
Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$
On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.
Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.
On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

Définition :

Soit un nombre complexe z.
L'écriture $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
a est appelé **partie réelle** de z, et b **partie imaginaire** de z.
On note $a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$.

Remarques :
- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Preuve :

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.
On a alors $a = \Re e(z)$, $a' = \Re e(z')$, $b = \Im m(z)$ et $b' = \Im m(z')$
Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.
Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement :

Si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$
et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

Exemple : Soit $z=2+3i$ et $z'=i-5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$z+z'=-3+4i$ $\qquad$ $z-z'=7+2i$

$2z-3z'=19+3i$ $\qquad$ $z\cdot z'=-13-13i$ $\qquad$ $z^2=-5+12i$

2) DIVISION

Propriété :

Tout nombre complexe non nul z admet un unique inverse noté $\frac{1}{z}$.

Preuve :

On pose $z=x+iy$

Existence : On considère le nombre complexe $z'=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

On a : $zz'=(x+iy)\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{(x-iy)(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$

Donc z' est bien un inverse de z .

Unicité : On considère z'' un autre inverse de z .

On a : $(z''-z')z=z''z-z'z=1-1=0$

Comme $z\neq 0$, on a forcément $z''-z'=0$ et donc $z''=z'$

3) CONJUGUÉ

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a+bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z}=a-bi$.

Exemple : Soit $z=3+5i$ et $z'=-2+3i$. Calculer :

$\bar{z}=3-5i$ $\qquad$ $\bar{z}'=-2-3i$ $\qquad$ $\bar{z}+\bar{z}'=1-8i$ $\qquad$ $z+z'=1+8i$

$\overline{z+z'}=1-8i$ $\qquad$ $\bar{z}\cdot\bar{z}'=-21+i$ $\qquad$ $zz'=-21-i$ $\qquad$ $\overline{zz'}=-21+i$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\bar{\bar{z}}=z$
- $z\cdot\bar{z}$ est un réel positif
- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{z-z'}=\bar{z}-\bar{z}'$; $\overline{zz'}=\bar{z}.\bar{z}'$; $\overline{z^n}=\bar{z}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)
- Si $z'\neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\Re\mathrm{e}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$; $\Im\mathrm{m}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $\Im\mathrm{m}(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$
- $\Re\mathrm{e}(z)=0 \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\bar{z}$ (z est un imaginaire pur)

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$.

- $\bar{z}=a-bi$ donc $\bar{\bar{z}}=a+bi=z$
- $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$ donc $z\cdot\bar{z}$ est un réel positif

- $z+z'=a+bi+a'+b'i=(a+a')+(b+b')i$.

  Comme $(a+a')$ et $(b+b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z+z'}=(a+a')-(b+b')i=a-bi+a'-b'i=\overline{z}+\overline{z}'$

- $z-z'=a+bi-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$.

  Comme $(a-a')$ et $(b-b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z-z'}=(a-a')+(b-b')i=a-bi-a'+b'i=\overline{z}-\overline{z}'$

- $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2 \;=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'}=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i$

  D'autre part $\overline{z}\cdot\overline{z}'=(a-bi)(a'-b'i)=aa'-ab'i-a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')-(ab'+a'b)i=\overline{zz'}$

- $\overline{z}^n=\overline{z^n}$ se démontre facilement par récurrence en utilisant $\overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z}'$ *exigible*

- Si $z'\neq 0$, $\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{a'+b'i}=\dfrac{a'-b'i}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\dfrac{a'-b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{-b'}{(a'^2+b'^2)}i$

  Comme $\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}$ et $\dfrac{-b'}{a'^2+b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\dfrac{1}{z'}}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+i\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}$

  D'autre part $\overline{z}'=a'-b'i$, donc $\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{1}{a'-b'i}=\dfrac{a'+b'i}{(a'-b'i)(a'+b'i)}=\dfrac{a'+b'i}{a'^2+b'^2}=\dfrac{a'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{b'}{a'^2+b'^2}i=\overline{\dfrac{1}{z'}}$

- Si $z'\neq 0$, $\overline{\dfrac{z}{z'}}=\overline{z\times\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\dfrac{1}{z'}}=\overline{z}\times\dfrac{1}{\overline{z}'}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$

- $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{a+bi+a-bi}{2}=\dfrac{2a}{2}=a=\;\Re e(z)$; $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b=\;\Im m(z)$

- $z=\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi \Leftrightarrow a+bi-a+bi=0 \Leftrightarrow 2bi=0 \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow \Im m(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

- $z=-\overline{z} \Leftrightarrow a+bi=-a+bi \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow \Re e(z)=0 \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

Remarque : La propriété $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Exemples : Méthode de l'expression conjuguée

- L'inverse de $1-i$ est : $\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$

- $\dfrac{1+i}{2-i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4-i^2}=\dfrac{1+3i}{4+1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

4) LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Propriété : binome de Newton

Soit a et b deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n , on a :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Preuve :

On note $\mathrm{P}(n)$: « $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ », pour $n\in\mathbb{N}$

Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{0-k}=\binom{0}{0}a^0 b^0=1$

Donc P(0) est vraie.

Hérédité :

Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé, c'est à dire $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (HR)

Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$

On a : $(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (d'après HR)

Ainsi $(a+b)^{n+1}=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On rentre *a* et *b* dans les sommes (on développe)

On coupe la somme en deux en isolant le dernier terme — On coupe la somme en deux en isolant le premier terme

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0+\binom{n}{0}a^0 b^{n+1+0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On pose $s=k+1$

$$=\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s-1}a^s b^{n-(s-1)}+a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On remplace *s* par *k* (*variable muette*)

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}$$

Égalité utilisée dans le triangle de Pascal

$$=\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0+\binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$=\binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}+\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0$$

Premier terme ($k=0$) — Dernier terme ($k=n+1$)

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie

Conclusion :

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Exemple :

$$(1+i)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}1^k i^{3-k}=\binom{3}{0}1^0 i^{3-0}+\binom{3}{1}1^1 i^{3-1}+\binom{3}{2}1^2 i^{3-2}+\binom{3}{3}1^3 i^{3-3}=i^3+3i^2+3i+1=-i-3+3i+1=-2+2i$$