Forme algébrique – conjugué – parties réelle et imaginaire

Ex 1-1 : *Vrai ou faux*

1) Si $z=4i-3$, alors

a) Im(z)=-3	d) $-\bar{z}=4i+3$
b) Im(z)=4	e) $i\bar{z}=4-3i$
c) $\bar{z}=4i+3$	f) Re($\bar{z}$)=-3

2) Si $z=-3i$, alors z est un imaginaire pur.

3) Si $z=-2$, alors iz est un imaginaire pur.

4) Si $z=a+ib$ (où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$) , alors

a) Re($z+3$)=Re(z)+3	c) Im(z^2)= b^2
b) Re(iz)= b	d) Im($2z$)= $2b$

Ex 1-2 : *Parties réelle et imaginaire*

1) Déterminer les parties réelle et imaginaire de :

$3i$; -5 ; 0 ; i^3 ; $3i-2$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $z=(4-2x)+i(5-x)$.

a) Pour quelle valeur de x , z est-il réel ?

b) Pour quelle valeur de x , z est-il imaginaire pur ?

Ex 1-3 : *Calculs dans les complexes*

1) Déterminer la forme algébrique des nombres :

$z_1=3+5-i+2(8-5i)$

$z_2=3(-2+5i)(3i-1)$

2) Déterminer les conjugués des nombres :

$z_3=5-4(i-3)$:

$z_4=3i(2-i)$:

3) Déterminer la forme algébrique des inverses des nombres :

-3 : i :

$-5i$: $1-2i$:

4) Écrire sous forme algébrique les nombres :

$\frac{3}{i}$

$\frac{2}{2i-1}$

$\frac{2-i}{2+3i}$

Ex 1-4 : *Réels et imaginaires purs*

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs de x et y les nombres ci-dessous sont réels ou imaginaires purs ?

$z_1=2x-4i+7$ et $z_2=3x-2i+4(x+iy)$

Ex 1-5 : ***Python : les commandes complexes***

Déterminer l'affichage en python correspondant aux instructions saisies.

```
z1=complex(-2,1)
z2=complex(1,2)
```

```
print(z1*z2.real)
print(z1)
print(z1.imag)
print(z2)
print(z1+z2)
print(z1+z2.real)
print(z1.conjugate())
```

```
(-2-1j)
1.0
(1+2j)
(-2+1j)
(-1+3j)
(-1+1j)
(-2+1j)
```

Ex 1-6 : ***Mettre sous forme algébrique - calculatrice***

Mettre les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique, puis vérifier avec la calculatrice :

1) $z_1=(4-5i)^2$

2) $z_2=(4-5i)(4+5i)$

3) $z_3=(4+5i)^2$

4) $z_4=2-i(3-4i)(1+i)$

5) $z_5=(1-2i)^3$

6) $z_6=i^4-i^3$

7) $z_7=\overline{(1-2i)^2}$

8) $z_8=\overline{1-i(2-5i)}$

9) $z_9=\dfrac{1}{4i-3}$

10) $z_{10}=\dfrac{1}{(5-i)(2-3i)}$

Ex 1-7 : ***Parties réelle et imaginaire en fonction de a et b***

Soit $z=a+ib$ (où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$).

Déterminer en fonction de a et b les parties réelles et imaginaires de :

1) $Z_1=z^2-2z$

2) $Z_2=\dfrac{z-i}{z+1}$

3) $Z_3=\dfrac{z-2+i}{z+1-i}$

Conjugué

Ex 1-8 : ***En fonction de $\bar{z}$***

Écrire en fonction de $\bar{z}$ les conjugués des nombres suivants :

1) $Z_1=z-3i$

2) $Z_2=iz-4$

3) $Z_3=(z-2i)(iz+4)$

4) $Z_4=\dfrac{z-2+i}{z-3-i}$

Ex 1-9 : $z+\bar{z}$ ***et*** $z-\bar{z}$

Soit $z=\dfrac{3-2i}{5-i}$ et $z'=\dfrac{3+2i}{5+i}$

1) Sans calcul, justifier que $z+z'$ est un réel ?

2) Sans calcul, justifier que $z-z'$ est un imaginaire pur.

Ex 1-10 : $z\bar{z}$

Dans chacun des cas, calculer $z\bar{z}$:

1) $z=1+3i$

2) $z=\dfrac{1-2i}{2i+1}$

Ex 1-11 : ***Réel ou imaginaire pur : Calculer le conjugué***

Soit z un nombre complexe non nul.

En calculant le conjugué des nombres ci-dessous, déterminer si chacun de ces nombres est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

$Z_1=z+\bar{z}$

$Z_2=\dfrac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}$ (où z n'est pas un imaginaire pur)

$Z_3=z^2+\bar{z}^2$

$Z_4=\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+1}$

Suites et Fonctions dans les complexes

Ex 1-12 : ***Suites dans les complexes***

On considère la suite (u_n) à valeurs complexe définie par
$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=(1+i)u_n \end{cases}$

1) Calculer les trois premier termes de cette suite.

2) À quel type de suite réelle ressemble cette suite ?

3) Pourquoi peut-on aussi définir une telle suite dans les complexes.

4) Donner son écriture explicite.

5) Calculer u_7 .

Ex 1-13 : ***Une fonction dans les complexes***

Soit f la fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2-3iz$.

1) Déterminer sous forme algébrique :

a) $f(i)$

b) $f(1-i)$

c) $f\left(\dfrac{1}{1+i}\right)$

2) Exprimer $\overline{f(z)}$ en fonction de $f(\bar{z})$

Ex 1-14 : ***Une fonction dans les complexes - invariant***

Soit f la fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=z-2\bar{z}+2$.

1) On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels . Donner l'expression algébrique de $f(z)$ en fonction de x et de y .

2) On appelle invariant de f tout nombre complexe qui est égal à son image . Existe-t-il des invariants de f ?

Ex 1-15 : ***Une fonction dans les complexes - invariant***

Soit f la fonction définie pour tout complexe z différent de $2i$ par $f(z)=\frac{2z}{z-2i}$.

1) Calculer l'image de 2, puis celle de $1+i$.

2) Existe-t-il des invariants de f ?

Équations

Ex 1-16 : ***Équations du premier degré et équations de second degré élémentaires***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1) $(2+4i)z+3-i=5z-i$

2) $(2-i)z+3-i=3z-i$

3) $\frac{i}{z+2i}=4$

4) $z^2=-9$

5) $(z-2i)^2=-4$

6) $\frac{z-1}{iz+1}=-i$

7) $\frac{z-3-i}{z+2-i}=-2i$

Ex 1-17 : ***Système d'équation***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations $\begin{cases}3z_1+z_2=2-5i\\ z_1-z_2=2+i\end{cases}$.

Ex 1-18 : ***Utiliser les parties réelles et imaginaires***

Soit $z=x+iy$ (où $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$).

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1) $z^2-\bar{z}=2$

2) $3z^2+z\bar{z}+6i\sqrt{2}=0$

Binôme de Newton

Ex 1-19 : ***Utiliser le triangle de Pascal***

En utilisant le triangle de Pascal, donner la forme algébrique des expressions ci-dessous :

1) $(1+2i)^3$

2) $(i+2)^4$

3) $(1-i)^5$

Ex 1-20 : ***Trouver un coefficient sans faire le développement***

1) Dans la formule de Newton avec $(x+y)^{12}$, peut-on trouver un terme en x^4y^6 . Si oui, quel est son coefficient ?

2) Même question avec x^4y^8

Ex 1-21 : ***Déterminer une somme***

Montrer que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$