# LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

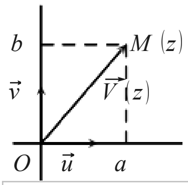
## 1 ) REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

**Définition :**

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ .

Au point $M$ de coordonnées $(a\,;b)$ , on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$.
On dit que $z=a+bi$ est **l'affixe** de $M$ ou que $M\ (a\,;b)$ est **l'image ponctuelle** de $z=a+bi$.

Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a\,;b)$ , on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$.
On dit que $z=a+bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}\,(a\,;b)$ est **l'image vectorielle** de $z=a+bi$.

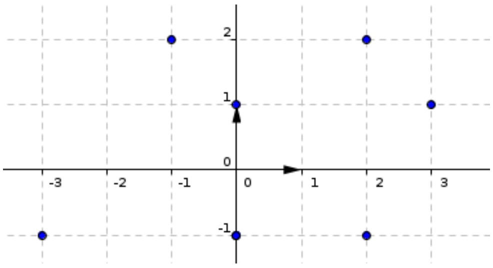



Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

**Exemple :** Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

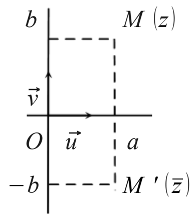
$z_1=2+2i$ ; $z_2=3+i$ ; $z_3=-1+2i$ ; $z_4=2-i$

$z_5=i$ ; $z_6=-i$ ; $z_7=1$ ; $z_8=-i-3$



**Remarque :**

Si $M$ est le point d'affixe $z$ , le point $M'$ d'affixe $\bar{z}$ est




**Propriétés :**

Si $M$ a pour affixe $z=a+b\,i$ et si $M'$ a pour affixe $z'=a'+b'i$ , avec $a, b, a', b'$ réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z=(a'-a)+(b'-b)\,i$
- $MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$
- $OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{a^2+b^2}$
- le milieu $I$ de $[MM']$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z+z'}{2}$

**Preuve :**

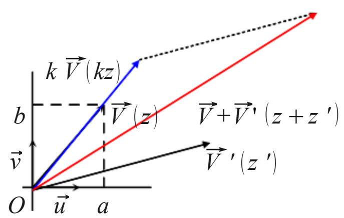
$M$ a pour coordonnées $(a\,;b)$ et $M'$ a pour coordonnées $(a'\,;b')$ . Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a'-a\\b'-b\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a'-a)+(b'-b)i=a'-a+b'i-bi=a'+b'i-(a+bi)=z'-z$
- le milieu $I$ de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+a'}{2}\,;\dfrac{b+b'}{2}\right)$ , donc son affixe est :

:

**Propriétés :**

- Si $\vec{V}$ a pour affixe $z$ et $\vec{V}'$ pour affixe $z'$, alors $\vec{V}+\vec{V}'$ a pour affixe $z+z'$.
- Si $k$ est un réel, alors $k\,\vec{V}$ a pour affixe $kz$.




**Preuve :**

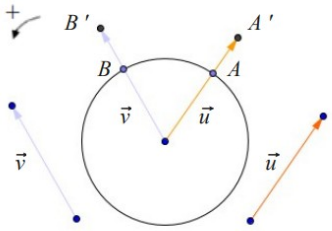
- Soit $a+bi$ et $a'+b'i$ les formes algébriques de $z$ et $z'$.
  Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{V}'$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

  On sait alors que le vecteur $\vec{V}+\vec{V}'$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}$.
  Il a donc pour affixe :
  $a+a'+(b+b')i=a+a'+bi+b'i=a+bi+a'+b'i=z+z'$ .

- Si $k$ est un réel, alors on sait que $k\,\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$, donc $k\,\vec{V}$ a pour affixe :

$$ka+kbi=k\,(a+bi)=kz\ .$$

## 2 ) MESURES DE L'ANGLE ORIENTÉ D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS




Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, $O$ un point quelconque et $C$ le cercle trigonométrique de centre $O$.
On considère $A'$ et $B'$ les points définis par $\overrightarrow{OA'}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'}=\vec{v}$.
Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique $C$ respectivement en $A$ et en $B$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires, respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux.

**Définitions :**

On appelle **mesures de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ tous les réels de la forme :

- $l+2k\pi$ où $l$ est la longueur de l'arc parcouru de $A$ vers $B$ dans le sens direct et où $k\in\mathbb{N}$
- $-l'-2k\pi$ où $l'$ est la longueur de l'arc parcouru de $A$ vers $B$ dans le sens indirect et où $k'\in\mathbb{N}$.

**Remarque :** On peut exprimer toutes les mesures sous la forme $l+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

**Les mesures en radian** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ c'est à dire, celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$.

Il en résulte que si $x$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
On dit que les angles orientés sont définis **modulo $2\pi$**.

**Notations :**

- La notation usuelle est $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion, on notera seulement $(\vec{u}, \vec{v})$ cet angle orienté.

- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.
  On écrit, par exemple, $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}$ signifiant qu'**une** mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
  On écrit aussi $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$ ou encore $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

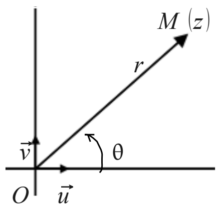
**Définition :**

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

**Remarque :**
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

## 3 ) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

**Coordonnées polaires :**




Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.
Soit $M(a\,;b)$ un point du plan (distinct de $O$).
On appelle **coordonnées polaires** de $M$, tout couple de nombres réels $(r, \theta)$ tel que :

$r=OM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})=\theta+2k\pi$ , $k\in\mathbb{Z}$

**Remarque :**
Soit $M$ le point d'affixe $x$ avec $x\in\mathbb{R}$, on a $r=OM=|x|$

**Définition :**

Tout nombre complexe non nul $z$ peut-être écrit sous la forme :

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.

On dit que $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de $z$.

**Propriété :**

Si deux nombres complexes $z$ et $z'$ sont écrits sous forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \iff r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \, [2\pi] \end{cases}$$

**Preuve :** Considérons les points $M$ et $M'$ d'affixes respectives $z$ et $z'$. On peut écrire :

$$z = z' \iff M = M' \iff$$

## 4 ) MODULE

**Définition :**

Soit le nombre complexe $z$ de forme algébrique $a + bi$ et soit $M$ le point d'affixe $z$.

On appelle **module** de $z$ le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ . On note $r = |z|$ .

**Remarque :**

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque $x$ est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
Pour un réel $x$ , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de $x$" ou "module de $x$".
Pour un nombre complexe non réel $z$ , $|z|$ sera lu impérativement "module de $z$".

**Exemple :** - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$ :

- $z_2 = \sqrt{3} + i$ :

**Propriétés :**

- Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe $z$ , on a $\|\vec{V}\| = |z|$
- Soit $A$ et $B$ deux points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ , on a $AB = |z_B - z_A|$

**Preuve :**
Si $\vec{V}$ est un vecteur d'affixe $z$, on a $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ avec $M$ d'affixe $z$ . Alors $\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = |z|$.
Si $A$ et $B$ sont les points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A =$ ...

**Propriétés :**

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )
- si $z \neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\bar{z} = |z|^2$ ( on retrouve $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ )
- si $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

**Preuve :**

- Soit $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ . On peut écrire :

- Le point $M'$ d'affixe $-z$ est symétrique du point $M$ par rapport à l'origine $O$.

  La symétrie conservant les distances on a :

- Le point $M''$ d'affixe est symétrique du point $M$ par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ .
  La symétrie conservant les distances on a : $OM'' = OM$ donc $|\bar{z}| = |z|$

- Soit $\vec{v}$ le vecteur d'affixe $z$ et $\vec{v'}$ le vecteur d'affixe $z'$.
  On sait que le vecteur $\vec{v} + \vec{v'}$ a pour affixe $z + z'$.
  En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\vec{v} + \vec{v'}\| \leqslant \|\vec{v}\| + \|\vec{v'}\|$ donc $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

- Si $z$ a pour forme algébrique $z = a + bi$ et si $z'$ a pour forme algébrique $z' = a' + b'i$, alors : *exigible*
  $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
  Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on en déduit que :
  $|zz'| = \sqrt{((aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2)} = \sqrt{((aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (a'b)^2)} = \sqrt{(a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(a'^2 + b'^2))} = \sqrt{((a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2))} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(a'^2 + b'^2)} = |z| \cdot |z'|$

- $|z^n| = |z|^n$ se montre facilement par récurrence en utilisant $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ *exigible*

- si $z' \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = \left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1 \text{ , } donc \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad et \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

- $z \cdot \overline{z} =$

- si $z \neq 0$ , $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

## 5 ) L'ENSEMBLE DES COMPLEXES DE MODULE 1

**Définition et notation :**

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$

**Remarques :**

- $\mathbb{U} =$

- Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est

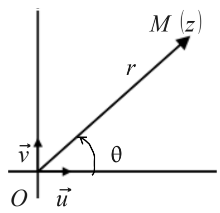
**Propriétés de stabilité :**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes appartenant à l'ensemble $\mathbb{U}$ . On a :

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ ( $z \neq 0$ )
- $\frac{z'}{z} \in \mathbb{U}$ ( $z \neq 0$ )

**Preuve :** Immédiat en utilisant les propriétés des modules

## 6 ) ARGUMENT




**Définition :**

Soit le nombre complexe non nul $z$ de forme algébrique $a+bi$ et soit $M$ le point d'affixe $z$.

On appelle **argument** de $z$ tout nombre réel $\theta$ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ . On note $\theta = \arg(z)$

**Remarque :** $\theta$ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près $(k \in \mathbb{Z})$ c'est-à-dire modulo $[2\pi]$ .

**Propriétés :**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\theta$ et $\theta'$ . On a :

- $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$ — $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ $[2\pi]$
- $\frac{1}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) + i\sin(-\theta)$ — $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$ $[2\pi]$
- $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')$ — $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ $[2\pi]$
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ — $\arg(z^n) = n\arg z$ $[2\pi]$
- $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ — $\arg(\overline{z}) = -\arg z$ $[2\pi]$
- $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$ — $\arg(-z) = \arg z + \pi$ $[2\pi]$

**Preuve :**

Pour les preuves, on peut utiliser les formules ci-dessous que nous verrons dans le prochain chapitre :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ; $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ ; $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

- On a : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\in\mathbb{R}^+$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ avec $r'\in\mathbb{R}^+$ .
  On montre facilement que : $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$ .
  On peut en déduire : $zz'=rr'(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$ .
  Comme $rr'$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz')=\arg z+\arg z'\ [2\pi]$

- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
  On peut en déduire que : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\times\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{1}{r}\times(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
  Comme $\dfrac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\theta=-\arg z\ [2\pi]$ .

- On a :
  $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\dfrac{1}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta'))=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$
  Alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\times\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\dfrac{r}{r'}\times(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
  Comme $\dfrac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\theta-\theta'=\arg z-\arg z'$

- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ .
  Pour $n=0$ , on a :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ et $\cos(0\times\theta)+i\sin(0\times\theta)=\cos(0)+i\sin(0)=1+0i=1$ , donc $P(0)$ est vraie.

  Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel $n$, c'est-à-dire $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ .

  Alors en multipliant les deux membres par $\cos\theta+i\sin\theta$, on obtient :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)](\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$
  $P(n+1)$ est alors justifiée.
  On a donc démontré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ .

  Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n\in\mathbb{N}$ , on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :
  $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\dfrac{1}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$
  La proposition est donc vérifiée pour tout $n\in\mathbb{Z}$ . $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$

  On peut écrire $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$
  Comme $r^n$ est un réel positif, on a donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$ : $\arg(z^n)=n\arg z\ [2\pi]$

- Sachant que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ , on peut écrire : $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
  Alors $\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$ .
  Comme $r$ est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z})=-\theta=-\arg z\ [2\pi]$

- Sachant que $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ , on peut écrire : $-(\cos\theta+i\sin\theta)=-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$
  Alors $-z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)]$ .
  Comme $r$ est un réel positif, on en déduit $\arg(-z)=\theta+\pi=\arg z+\pi\ [2\pi]$

**Propriétés :**

Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\bar{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$\bar{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ et $-z=r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$