LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

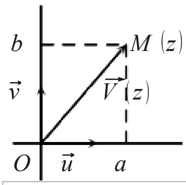
1) REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}\ ,\vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a\ ;b)$, on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$.
On dit que $z=a+bi$ est **l'affixe** de M ou que $M\ (a\ ;b)$ est **l'image ponctuelle** de $z=a+bi$.

Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a\ ;b)$, on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$.
On dit que $z=a+bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}\ (a\ ;b)$ est **l'image vectorielle** de $z=a+bi$.

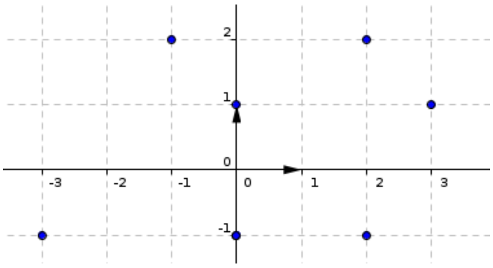


Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

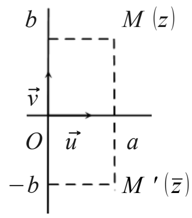
$z_1=2+2i$; $z_2=3+i$; $z_3=-1+2i$; $z_4=2-i$

$z_5=i$; $z_6=-i$; $z_7=1$; $z_8=-i-3$



Remarque :

Si M est le point d'affixe z , le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Propriétés :

Si M a pour affixe $z=a+b\,i$ et si M' a pour affixe $z'=a'+b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z=(a'-a)+(b'-b)\,i$
- $MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$
- $OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{a^2+b^2}$
- le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z+z'}{2}$

Preuve :

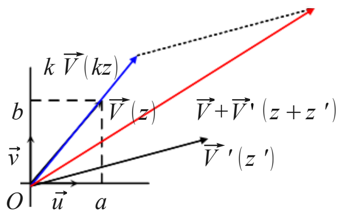
M a pour coordonnées $(a\ ;b)$ et M' a pour coordonnées $(a'\ ;b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a'-a\\b'-b\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a'-a)+(b'-b)i=a'-a+b'i-bi=a'+b'i-(a+bi)=z'-z$
- le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+a'}{2}\ ;\dfrac{b+b'}{2}\right)$, donc son affixe est :

$$z_I=\frac{a+a'}{2}+\frac{i\,(b+b')}{2}=\frac{a+a'+bi+b'i}{2}=\frac{a+bi+a'+b'i}{2}=\frac{z+z'}{2}$$

Propriétés :

- Si $\vec{V}$ a pour affixe z et $\vec{V'}$ pour affixe z', alors $\vec{V}+\vec{V'}$ a pour affixe $z+z'$.
- Si k est un réel, alors $k\,\vec{V}$ a pour affixe kz.



Preuve :

- Soit $a+bi$ et $a'+b'i$ les formes algébriques de z et z'.
  Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{V'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

  On sait alors que le vecteur $\vec{V}+\vec{V'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}$.

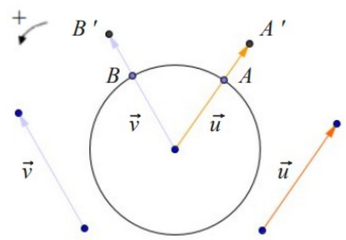
  Il a donc pour affixe :
  $a+a'+(b+b')i=a+a'+bi+b'i=a+bi+a'+b'i=z+z'$.

- Si k est un réel, alors on sait que $k\,\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$, donc $k\,\vec{V}$ a pour affixe :

  $$ka+kbi=k\,(a+bi)=kz\ .$$

2) MESURES DE L'ANGLE ORIENTÉ D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et C le cercle trigonométrique de centre O.
On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'}=\vec{v}$.
Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique C respectivement en A et en B.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires, respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux.



Définitions :

On appelle **mesures de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ tous les réels de la forme :

- $l+2k\pi$ où l est la longueur de l'arc parcouru de A vers B dans le sens direct et où $k \in \mathbb{N}$
- $-l'-2k\pi$ où l' est la longueur de l'arc parcouru de A vers B dans le sens indirect et où $k' \in \mathbb{N}$.

Remarque : On peut exprimer toutes les mesures sous la forme $l+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Les mesures en radian de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ c'est à dire, celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$.

Il en résulte que si x est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
On dit que les angles orientés sont définis **modulo 2π**.

Notations :

- La notation usuelle est $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion, on notera seulement $(\vec{u}, \vec{v})$ cet angle orienté.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.

  On écrit, par exemple, $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}$ signifiant qu'**une** mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

  On écrit aussi $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$ ou encore $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Définition :

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

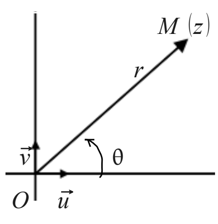
Remarque :
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

3) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Coordonnées polaires :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $M(a ; b)$ un point du plan (distinct de O).
On appelle **coordonnées polaires** de M, tout couple de nombres réels (r, θ) tel que :

$r=OM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})=\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$



On a alors $r=\sqrt{a^2+b^2}$
$a=r\cos\theta$ et $b=r\sin\theta$

$z=a+ib$
$=r\cos\theta+ir\sin\theta$
$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

Remarque :
Soit M le point d'affixe x avec $x\in\mathbb{R}$, on a $r=OM=|x|$

Définition :

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.

On dit que $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z.

Propriété :

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$, on a :

$$z=z' \Leftrightarrow r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'[2\pi] \end{cases}$$

Preuve : Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On peut écrire :

$$z=z' \Leftrightarrow M=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'})[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'[2\pi] \end{cases}$$

4) MODULE

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a+bi$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **module** de z le nombre réel positif $r=OM=\sqrt{a^2+b^2}$. On note $r=|z|$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r=OM=|x|$.
Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

Exemple : - Calculer le module de $z_1=3+4i$:

$|z_1|=5$

- $z_2=\sqrt{3}+i$:

$|z_2|=2$

Propriétés :

- Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\vec{V}\|=|z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB=|z_B-z_A|$

Preuve :
Si $\vec{V}$ est un vecteur d'affixe z, on a $\vec{V}=\overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z . Alors $\|\vec{V}\|=\|\overrightarrow{OM}\|=OM=|z|$.
Si A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B-z_A=$ ...

Propriétés :

- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $|-z|=|z|$
- $|\bar{z}|=|z|$
- $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$ et $|z^n|=|z|^n$ ($n\in\mathbb{N}$)
- si $z\neq0$ $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$
- si $z'\neq0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\bar{z}=|z|^2$ (on retrouve $z\bar{z}\in\mathbb{R}^+$)
- si $z\neq0$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Preuve :

- Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On peut écrire : $|z|=0 \Leftrightarrow OM=0 \Leftrightarrow M=O \Leftrightarrow z=0$
- Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O.

  La symétrie conservant les distances on a : $OM'=OM$ donc $|-z|=|z|$
- Le point M'' d'affixe est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$.
  La symétrie conservant les distances on a : $OM''=OM$ donc $|\bar{z}|=|z|$
- Soit $\vec{v}$ le vecteur d'affixe z et $\vec{v'}$ le vecteur d'affixe z'.
  On sait que le vecteur $\vec{v}+\vec{v'}$ a pour affixe $z+z'$.
  En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\vec{v}+\vec{v'}\|\leqslant\|\vec{v}\|+\|\vec{v'}\|$ donc $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$
- Si z a pour forme algébrique $z=a+bi$ et si z' a pour forme algébrique $z'=a'+b'i$, alors : *exigible*
  $zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$
  Comme $(aa'-bb')$ et $(ab'+a'b)$ sont des réels, on en déduit que :
  $|zz'|=\sqrt{((aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2)}=\sqrt{((aa')^2+(bb')^2+(ab')^2+(a'b)^2)}=\sqrt{(a^2(a'^2+b'^2)+b^2(a'^2+b'^2))}=\sqrt{((a^2+b^2)(a'^2+b'^2))}=\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a'^2+b'^2)}=|z|\cdot|z'|$
- $|z^n|=|z|^n$ se montre facilement par récurrence en utilisant $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$ *exigible*

- si $z'\neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$|z|\times\left|\frac{1}{z}\right|=\left|z\times\frac{1}{z}\right|=|1|=1\text{ , donc }\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}\qquad et\qquad \left|\frac{z}{z'}\right|=\left|z\times\frac{1}{z'}\right|=|z|\times\left|\frac{1}{z'}\right|=|z|\frac{1}{|z'|}=\frac{|z|}{|z'|}$$

- $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$ (donc $z\in\mathbb{R}^+$) *exigible*

- si $z\neq 0$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

5) L'ENSEMBLE DES COMPLEXES DE MODULE 1

Définition et notation :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$

Remarques :

- $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|=1\}$
- Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

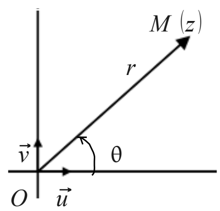
Propriétés de stabilité :

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à l'ensemble $\mathbb{U}$. On a :

- $zz'\in\mathbb{U}$
- $\dfrac{1}{z}\in\mathbb{U}$ ($z\neq 0$)
- $\dfrac{z'}{z}\in\mathbb{U}$ ($z\neq 0$)

Preuve : Immédiat en utilisant les propriétés des modules

6) ARGUMENT



Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a+bi$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta=(\vec{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$. On note $\theta=\arg(z)$

Remarque : θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près $(k\in\mathbb{Z})$ c'est-à-dire modulo $[2\pi]$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' . On a :

- $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$ — $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$ $[2\pi]$
- $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(\theta)+i\sin(-\theta)$ — $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg z$ $[2\pi]$
- $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$ — $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'$ $[2\pi]$
- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ — $\arg(z^n)=n\arg z$ $[2\pi]$
- $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ — $\arg(\overline{z})=-\arg z$ $[2\pi]$
- $-(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$ — $\arg(-z)=\arg z+\pi$ $[2\pi]$

Preuve :

Pour les preuves, on peut utiliser les formules ci-dessous que nous verrons dans le prochain chapitre :

$\forall a\in\mathbb{R}$ et $\forall b\in\mathbb{R}$, on a : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$; $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$; $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

- On a : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\in\mathbb{R}^+$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ avec $r'\in\mathbb{R}^+$.
On montre facilement que : $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$.
On peut en déduire : $zz'=rr'(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$.
Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz')=\arg z+\arg z'\ [2\pi]$

- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
On peut en déduire que : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\times\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{1}{r}\times(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
Comme $\dfrac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\theta=-\arg z\ [2\pi]$.

- On a :
$\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\dfrac{1}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos(-\theta')+i\sin(-\theta'))=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$
Alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\times\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\dfrac{r}{r'}\times(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
Comme $\dfrac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\theta-\theta'=\arg z-\arg z'$

- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.
Pour $n=0$, on a :
$(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ et $\cos(0\times\theta)+i\sin(0\times\theta)=\cos(0)+i\sin(0)=1+0i=1$, donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n, c'est-à-dire $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Alors en multipliant les deux membres par $\cos\theta+i\sin\theta$, on obtient :
$(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)](\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$
$P(n+1)$ est alors justifiée.
On a donc démontré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :
$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\dfrac{1}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$
La proposition est donc vérifiée pour tout $n\in\mathbb{Z}$. $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$

On peut écrire $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$
Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $\arg(z^n)=n\arg z\ [2\pi]$

- Sachant que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, on peut écrire : $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
Alors $\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z})=-\theta=-\arg z\ [2\pi]$

- Sachant que $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$, on peut écrire : $-(\cos\theta+i\sin\theta)=-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$
Alors $-z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z)=\theta+\pi=\arg z+\pi\ [2\pi]$

Propriétés :

Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\bar{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$\bar{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ et $-z=r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$