

LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

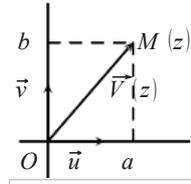
1) REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'afixe** de M ou que $M(a; b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.

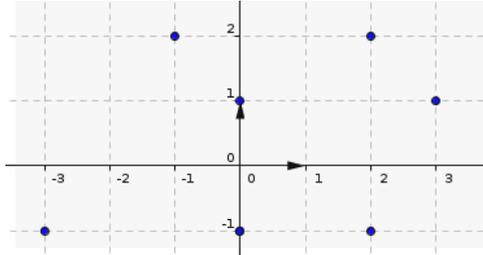
Au vecteur \vec{V} de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'afixe** de \vec{V} ou que $\vec{V}(a; b)$ est **l'image vectorielle** de $z = a + bi$.



Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

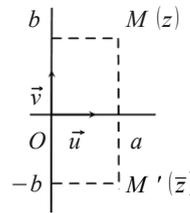
Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

- $z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$
- $z_5 = i$; $z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$



Remarque :

Si M est le point d'affixe z , le point M' d'affixe \bar{z} est la symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$ • $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ • le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

Preuve :

M a pour coordonnées $(a; b)$ et M' a pour coordonnées $(a'; b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a' - a) + (b' - b)i = a' - a + b'i - bi = a' + b'i - (a + bi) = z' - z$
- le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+a'}{2}; \frac{b+b'}{2}\right)$, donc son affixe est :

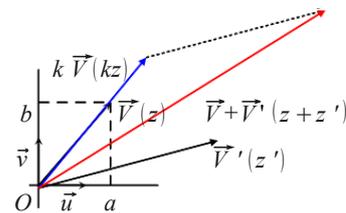
$$z_I = \frac{a+a'}{2} + \frac{i(b+b')}{2} = \frac{a+a'+bi+b'i}{2} = \frac{a+bi+a'+b'i}{2} = \frac{z+z'}{2}$$

Propriétés :

- Si \vec{V} a pour affixe z et \vec{V}' pour affixe z' , alors $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe kz .

Preuve :

- Soit $a + bi$ et $a' + b'i$ les formes algébriques de z et z' .
Le vecteur \vec{V} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur \vec{V}' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.
- On sait alors que le vecteur $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$.
Il a donc pour affixe :
 $a + a' + (b + b')i = a + a' + bi + b'i = a + bi + a' + b'i = z + z'$.



- Si k est un réel, alors on sait que $k\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$, donc $k\vec{V}$ a pour affixe :
 $ka + kbi = k(a + bi) = kz$.

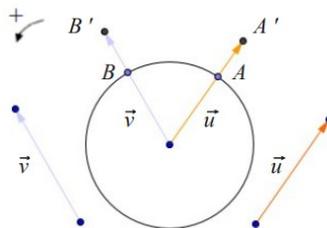
2) MESURES DE L'ANGLE ORIENTÉ D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et C le cercle trigonométrique de centre O .

On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$.
Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique C respectivement en A et en B .

Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ sont unitaires,

respectivement colinéaires à \vec{u} et \vec{v} et de même sens qu'eux.



Définitions :

On appelle **mesures de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ tous les réels de la forme :

- $l + 2k\pi$ où l est la longueur de l'arc parcouru de A vers B dans le sens direct et où $k \in \mathbb{N}$
- $-l' - 2k'\pi$ où l' est la longueur de l'arc parcouru de A vers B dans le sens indirect et où $k' \in \mathbb{N}$.

Remarque : On peut exprimer toutes les mesures sous la forme $l + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Les mesures en radian de l'angle orienté de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ c'est à dire, celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v})$.

Il en résulte que si x est une mesure de (\vec{u}, \vec{v}) , alors les autres mesures sont de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On dit que les angles orientés sont définis **modulo 2π** .

Notations :

• La notation usuelle est $(\vec{u}; \vec{v})$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion, on notera seulement (\vec{u}, \vec{v}) cet angle orienté.

• Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.

On écrit, par exemple, $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ signifiant qu'une mesure de (\vec{u}, \vec{v}) est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit aussi $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Définition :

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) .

Remarque :

La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

3) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Coordonnées polaires :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $M(a; b)$ un point du plan (distinct de O).

On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r, θ) tel que :

$$r = OM \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque :

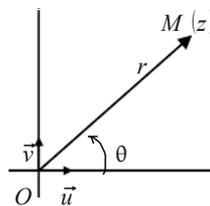
Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$

Définition :

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*.$$

On dit que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z .



$$\text{On a alors } r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta$$

$$z = a + ib \\ = r \cos \theta + ir \sin \theta \\ = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Propriété :

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Preuve : Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On peut écrire :

$$z = z' \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

4) MODULE

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. On note $r = |z|$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x ".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z ".

Exemple : - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$:

$$|z_1| = 5$$

- $z_2 = \sqrt{3} + i$:

$$|z_2| = 2$$

Propriétés :

- Soit \vec{v} un vecteur d'affixe z , on a $|\vec{v}| = |z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB = |z_B - z_A|$

Preuve :

Si \vec{v} est un vecteur d'affixe z , on a $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z . Alors $|\vec{v}| = |\overrightarrow{OM}| = OM = |z|$.

Si A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B , le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A = \dots$

Propriétés :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
- si $z \neq 0$ $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- si $z' \neq 0$ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $z \bar{z} = |z|^2$ (on retrouve $z \bar{z} \in \mathbb{R}^+$)
- si $z \neq 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Preuve :

• Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On peut écrire : $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow z = 0$

• Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O .

La symétrie conservant les distances on a : $OM' = OM$ donc $|-z| = |z|$

• Le point M'' d'affixe \bar{z} est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
La symétrie conservant les distances on a : $OM'' = OM$ donc $|\bar{z}| = |z|$

• Soit \vec{v} le vecteur d'affixe z et \vec{v}' le vecteur d'affixe z' .
On sait que le vecteur $\vec{v} + \vec{v}'$ a pour affixe $z + z'$.
En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $|\vec{v} + \vec{v}'| \leq |\vec{v}| + |\vec{v}'|$ donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

• Si z a pour forme algébrique $z = a + bi$ et si z' a pour forme algébrique $z' = a' + b'i$, alors : *exigible*

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on en déduit que :

$$|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{(aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (a'b)^2} = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| \cdot |z'|$$

• $|z^n| = |z|^n$ se montre facilement par récurrence en utilisant $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ *exigible*

- si $z' \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$|z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1, \text{ donc } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

- $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (donc $z \in \mathbb{R}^+$) exigible
- si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

5) L'ENSEMBLE DES COMPLEXES DE MODULE 1

Définition et notation :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté \mathbb{U}

Remarques :

- $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$
- Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de \mathbb{U} est le cercle trigonométrique.

Propriétés de stabilité :

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à l'ensemble \mathbb{U} . On a :

$$\bullet \quad zz' \in \mathbb{U} \quad \bullet \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{U} \quad (z \neq 0) \quad \bullet \quad \frac{z'}{z} \in \mathbb{U} \quad (z \neq 0)$$

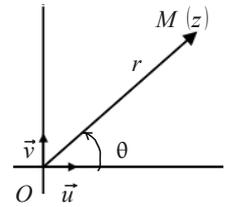
Preuve : Immédiat en utilisant les propriétés des modules

6) ARGUMENT

Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$. On note $\theta = \arg(z)$



Remarque : θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo $[2\pi]$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' . On a :

• $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
• $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(\theta) + i \sin(-\theta)$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$
• $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
• $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$	$\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$
• $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$	$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$
• $-(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$	$\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Preuve :

Pour les preuves, on peut utiliser les formules ci-dessous que nous verrons dans le prochain chapitre :

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad ; \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

- On a : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r' \in \mathbb{R}^+$.
On montre facilement que : $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$.
On peut en déduire : $zz' = rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$.
Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.
- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$
On peut en déduire que : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
Comme $\frac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg z \pmod{2\pi}$.
- On a :
$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{1}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos(-\theta') + i \sin(-\theta')) = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$$

Alors $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \frac{r}{r'} (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$
Comme $\frac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z'$.
- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
Pour $n=0$, on a :
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ et $\cos(0 \times \theta) + i \sin(0 \times \theta) = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + 0i = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n , c'est-à-dire $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
Alors en multipliant les deux membres par $\cos \theta + i \sin \theta$, on obtient :
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)](\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)$
 $P(n+1)$ est alors justifiée.
On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$
La proposition est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$
On peut écrire $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$
Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) = n \arg z \pmod{2\pi}$.
- Sachant que $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, on peut écrire : $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$
Alors $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z \pmod{2\pi}$.
- Sachant que $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, on peut écrire : $-(\cos \theta + i \sin \theta) = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$
Alors $-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$.

Propriétés :

Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. \bar{z} et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \quad \text{et} \quad -z = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$$