2 : Les nombres complexes - point de vue géométrique : exercices - page 1

corrections : http://pierrelux.net

Affixes de points et de vecteurs

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Ex 2-1 : ***Calculs d'affixes***

1) Déterminer les affixes des points suivants :
$A(2;0)$, $B(0;-5)$ et $C(-2;3)$

2) Déterminer les affixes des vecteurs suivants :
$-3\vec{u}$; $5\vec{u}$; $3\vec{u}-5\vec{v}$

3) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:
$A(2;5)$, $B(1;3)$, $C(3;0)$ et $D(-3;2)$

Ex 2-2 : ***Vecteurs colinéaires***

1) Soit $\vec{t}$ d'affixe $3-i$, $A(3,-1)$ et $B(x,3)$.

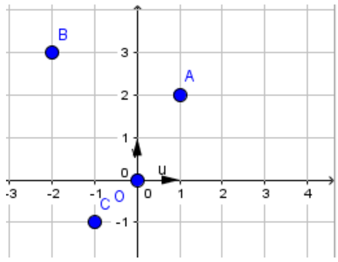
Pour quelle valeur de x , $\vec{t}$ est-il colinéaire à $\overrightarrow{AB}$?

2) Soit $A(3;4)$, $B(1,2)$, $C(a;0)$ et $D(4;-b)$.

Pour quelles valeurs de a et b , ABCD est-il un parallélogramme ?

Ex 2-3 : ***Lire et calculer des affixes***

1) Lire les affixes des points A, B et C.



2) Lire les affixes des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$

3) Déterminer les affixes des milieux des côtés du triangle ABC.

Ex 2-4 : ***Affixe et parallélogramme***

Soit A, B et C les points d'affixes $z_A=5-i$, $z_B=4-3i$ et $z_C=-2+2i$.

1) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3) Vérifier que ses diagonales ont le même milieu.

Ex 2-5 : ***Affixes de vecteurs et droites***

Soit A, B, C et D les points d'affixes $z_A=4+i$, $z_B=3-2i$, $z_C=-4+3i$ et $z_D=-1+9i$.

Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

Ex 2-6 : ***Affixes, centre de gravité et points alignés***

Soit A, B et C les points d'affixes $z_A=3+2i$, $z_B=4-3i$ et $z_C=-2+2i$.
1) Déterminer l'affixe du centre de gravité G de ABC.
(Le centre de gravité G vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

2) Déterminer l'affixe du milieu I de [BC] et montrer que les points A,I et G sont alignés.

Ex 2-7 : ***Affixes et centre de gravité***

Soit A, B, C et D les points d'affixes $z_A=3i$, $z_B=4+i$, $z_C=2-3i$ et $z_D=-2-i$.

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?

2) Soit G tel que $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Déterminer l'affixe de G.

3) Montrer que G est le centre de gravité de ACD.

Ex 2-8 : ***Ensembles de points***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, déterminer dans chacun des cas l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$

1) $3z+5i\bar{z}=7-2i$

2) $(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}=z\bar{z}$

3) $z^2+\bar{z}\in\mathbb{R}$

4) $(1+z)(i+\bar{z}) \in i\mathbb{R}$

5) $\dfrac{z+1-2i}{z-3+2i} \in \mathbb{R}$

6) $\dfrac{z+1-2i}{z-3+2i} \in i\mathbb{R}$

Modules

Ex 2-9 : ***Calculs***

Déterminer le module des nombres complexes ci-dessous :

$z_1=2-3i$

$z_2=3+4i$

$z_3=-4i$

$z_4=-3$

Ex 2-10 : ***Calculs***

1) Soit z un nombre complexe de module r .
Déterminer $|-z|$ et $|iz|$.

2) Déterminer les longueurs AB et CD avec $z_A=2+3i$, $z_B=1+4i$, $z_C=3i$ et $z_D=5-2i$.

3) Déterminer le module des nombres :
-2 ; 5 ; $3i$; $-2i$; $-1-i$; $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-3i$

Ex 2-11 : ***Appliquer les formules***

Déterminer le module des nombres complexes ci-dessous :

$z_1=(1+i)(2-3i)$

$z_2=(5+2i)+(3-i)$

$$z_3=\frac{2+i}{1-i}$$

$$z_4=(1-i)^4$$

<u>Ex 2-12 :</u> ***L'ensemble*** $\mathbb{U}$

Montrer que les nombres complexes ci-dessous appartiennent à

l'ensemble $\mathbb{U}$.

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \;,\; z_2=i \;,\; z_3=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}i \;,\; \frac{z_1}{z_2}$$

<u>Ex 2-13 :</u> ***Ensembles de points***

Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1) $|z-3-2i|=5$

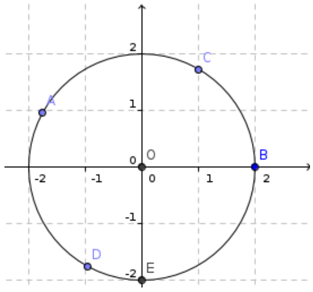
2) $|z-2-i|=|z+5-i|$

3) $|z+i|=|z-1|$

<u>Arguments</u>

<u>Ex 2-14 :</u> ***Lecture graphique***

Lire le module et un argument des affixes des points de la figure :



<u>Ex 2-15 :</u> ***S'aider de la représentation graphique***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$,

représenter, puis déterminer le module et un argument des nombres :

$z_1=-1+i$, $z_2=-1-i$, $z_3=-4$, $z_4=3i$

Ex 2-16 : ***Avec la calculatrice***

En utilisant la calculatrice déterminer un argument des nombres complexes ci-dessous :

-2 ; $-2i$; $-1-i$; $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-3i$

Ex 2-17 : ***Appliquer les formules***

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ .
Déterminer en fonction de θ les arguments ci-dessous :

$\arg(-z)$, $\arg(iz)$, $\arg(z^5)$ et $\arg\left(-\frac{i}{z}\right)$

Ex 2-18 :

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$.

Déterminer le module et un argument de :
$z_1=2z$, $z_2=iz$, $z_3=-3z$, $z_4=-3iz$, $z_5=\bar{z}$

Ex 2-19 : ***Représenter graphiquement***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, représenter les points M d'affixe z tels que :

1) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

2) $\arg(z)=\frac{-2\pi}{3}\ [2\pi]$

3) $\begin{cases}\arg(z)=\frac{\pi}{4}[2\pi]\\ |z|=3\end{cases}$

Forme trigonométrique

Ex 2-20 :

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes ci-dessous :

$z_1=-3i$

$z_2=4-4i$

$z_3=-\sqrt{3}+3i$

Ex 2-21 : ***Forme trigonométrique ou pas ?***

Les nombres complexes ci-dessous sont-ils écrits sous forme trigonométrique ?

1) $z_1=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) $z_2=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $z_3=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

4) $z_4=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ex 2-22 : ***De la forme trigonométrique à la forme algébrique***

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes ci-dessous :

1) $z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

2) $z_2=3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$

3) $z_3=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ex 2-23 : ***Écrire sous forme trigonométrique***

Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique

1) $z_1=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) $z_2=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $z_3=3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Avec des suites

Ex 2-24 : ***Conjecture avec Python***

Soit la suite (z_n) de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0=2 \\ z_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)z_n \end{cases}$$

1) Calculer z_1 , z_2 , z_3 et z_4 .

2) On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
from math import sqrt

def suite(n):
    z=complex(2,0)
    for k in range(1,n+1):
        z=z*complex(sqrt(3)/2,-1/2)
        r=abs(z)
    return(r)

print(suite(10))
print(suite(20))
print(suite(30))
```

complex(a,b) permet de définir le nombre complexe $a+ib$

abs(z) retourne le module du nombre complexe z

Le programme affiche :

>>>

1.999999999999999

1.9999999999999978

1.999999999999997

a) Que renvoie la fonction suite() ?

b) Que peut-on conjecturer ?

c) Démontrer cette conjecture.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

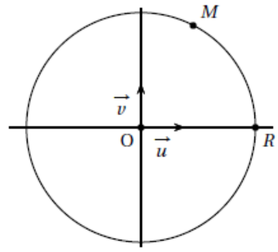
$$\arg(z_n) = \frac{-n\pi}{6} \quad [2\pi]$$

4) Démontrer que pour tout entier naturel k , z_{6k+3} est un imaginaire pur.

Ex 2-25 : ***Baccalauréat S – Antilles-Guyane 22 juin 2015 – ex 3***

Complexes – suite géométrique – géométrie - inégalité triangulaire

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[O ; \vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
   - **a.** Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   - **b.** Démontrer cette conjecture, puis conclure.*