

# NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

## 1) TRIGONOMETRIE

### A) FORMULES D'ADDITION

#### Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad ; \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

#### Preuve :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On considère le cercle trigonométrique  $C$  de centre  $O$  muni du repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On note  $A$  et  $B$  les points de  $C$ , définis par  $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$  et  $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$ .

Les coordonnées de  $A$  et de  $B$  sont respectivement

D'autre part, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) =$$

(la propriété utilisée est la relation de Chasles)

Calculons alors de deux manières le produit scalaire  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  :

- avec les coordonnées :
- en utilisant  $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  :

Ainsi  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Pour les trois autres formules, il suffit d'appliquer  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  après les modifications suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) \dots$$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \dots$$

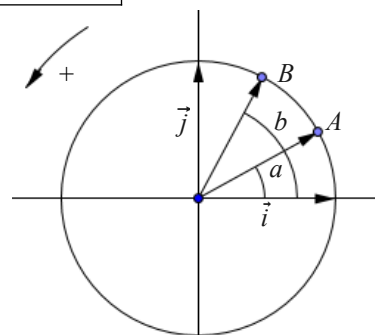
$$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \dots$$

#### Exemple :

En remarquant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , on peut calculer les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

- $\cos \frac{\pi}{12} =$

- $\sin \frac{\pi}{12} =$



### B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

#### FORMULES DE DUPLICATION

#### FORMULES DE LINÉARISATION

#### Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$ , on a :

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$   
 $= 2 \cos^2 a - 1$   
 $= 1 - 2 \sin^2 a$

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

### Preuve :

En prenant  $b = a$ , dans les formules précédentes on obtient  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$  et  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .

En utilisant la relation  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ , on obtient  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  et  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.

## 2) NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres. C'est-à-dire que la fonction  $f : \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$  est telle que  $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ .

Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

**Notation :** Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  et par conséquent pour  $r \in \mathbb{R}_+$ , on a  $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$   
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

### Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{n i \theta}, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

### Remarques :

• La propriété  $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ , facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

En effet, on a d'une part :  $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i \sin(\theta+\theta')$

Et d'autre part :  $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \dots = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

et

• La propriété  $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$  permet, en procédant de la même façon, de retrouver les **formules de duplication** :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

## 3) FORMULES DE MOIVRE ET D'EULER

On montre facilement :

### Propriété : FORMULES D'EULER

Pour tout réel  $\theta$ , on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

### Remarque :

Il est souvent utile de retenir les formules ainsi :

### Propriété : FORMULE DE MOIVRE

Pour tout réel  $\theta$ , et pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$