NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

1) TRIGONOMÉTRIE

A) FORMULES D'ADDITION

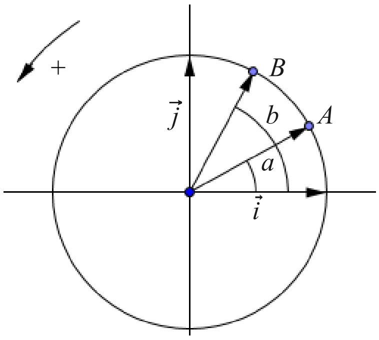
Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$; $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Preuve :



- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
On note A et B les points de C, définis par $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.

Les coordonnées de A et de B sont respectivement $(\cos a ; \sin a)$ et $(\cos b ; \sin b)$.

D'autre part, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b - a$$

(la propriété utilisée est la relation de Chasles)

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b-a) = OA \times OB \times \cos(a-b)$

Ainsi $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Pour les trois autres formules, il suffit d'appliquer $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ après les modifications suivantes :

$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) \ldots$

$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \ldots$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \ldots$

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

- $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

FORMULES DE DUPLICATION	*FORMULES DE LINÉARISATION*
Propriétés : $\forall a \in \mathbb{R}$, on a : • $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ • $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$	• $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ • $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant $b = a$, dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.

2) NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres . C'est-à-dire que la fonction $f : \theta \longmapsto \cos\theta + i \sin\theta$ est telle que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.

Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ $\qquad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

En effet, on a d'une part : $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

Et d'autre part : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \ldots = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet, en procédant de la même façon, de retrouver les **formules de duplication** :

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

3) FORMULES DE MOIVRE ET D'EULER

On montre facilement :

Propriété : FORMULES D'EULER

Pour tout réel θ , on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque :

Il est souvent utile de retenir les formules ainsi : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Propriété : FORMULE DE MOIVRE

Pour tout réel θ , et pour tout entier naturel n on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \quad \Leftrightarrow \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$