Formules d'addition :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\quad$ $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ $\quad$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Formules de duplication :

$\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

- $\sin 2a=2\sin a\cos a$
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
  $=2\cos^2 a-1$
  $=1-2\sin^2 a$

Formules de linéarisation :

$\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

- $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Notation exponentielle d'un nombre complexe :

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r\in\mathbb{R}_+^*$, on a $r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,e^{i\theta}$

Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad$ $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{i(-\theta)}=e^{-i\theta}$ $\quad$ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=e^{ni\theta}$, $n\in\mathbb{Z}$ $\quad$ $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ $\quad$ $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$

- La propriété $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

En effet, on a d'une part : $e^{i(\theta+\theta')}=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$

Et d'autre part :

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\ldots=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$

- La propriété $(e^{i\theta})^2=e^{2i\theta}$ permet, en procédant de la même façon, de retrouver les **formules de duplication** :

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ et $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ, on a :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Il est souvent utile de retenir les formules ainsi :

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta \quad \text{et} \quad e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$$

Formule de Moivre :

Pour tout réel θ, et pour tout entier naturel n on a :

$$(e^{i\theta})^n=e^{ni\theta} \Leftrightarrow (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$