

# LES NOMBRES COMPLEXES : ÉQUATIONS POLYNOMIALES

## 1) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

### Propriété :

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des réels (avec  $a \neq 0$ ) admet dans  $\mathbb{C}$  deux solutions (éventuellement confondues). Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant de l'équation.  $\Delta$  est un nombre réel.

- si  $\Delta \geq 0$ , les deux solutions sont réelles :  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si  $\Delta < 0$ , les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :  
 $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Le trinôme  $az^2 + bz + c$  peut alors se factoriser sous la forme  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .

### Preuve :

On considère l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des réels (avec  $a \neq 0$ )

On peut écrire  $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si  $\Delta > 0$ , l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement.

Comme  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont :  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- si  $\Delta = 0$ , l'équation a une solution réelle  $z = -\frac{b}{2a}$

- si  $\Delta < 0$ ,  $-\Delta > 0$  et on peut écrire :  $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$ , donc  $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2 \sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme  $az^2 + bz + c$  sous la forme  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .

$$a z^2 + bz + c = a \left( \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2} \right) = a \left( z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left( z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

On en déduit que l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  a deux solutions complexes qui sont :  $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

## 2) POLYNÔMES

### Définitions :

Soit un entier naturel  $n$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels.

Une **fonction polynôme à coefficients réels** (ou **polynôme**), est une fonction souvent notée  $P$  définie sur  $\mathbb{C}$  qui admet une unique écriture sous la forme :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Le **polynôme nul** est le polynôme  $P$  défini pour tout nombre complexe  $z$  par  $P(z) = 0$ .

Si  $P$  n'est pas le polynôme nul,  $n$  est le **degré** de  $P$

On appelle **racine** du polynôme  $P$  tout nombre complexe  $z_0$  tel que  $P(z_0) = 0$ .

### Exemples :

$P_1(z) = 5$  est un polynôme constant de degré 0.

$P_2(z) = 5z^4 - 2z^2 + 1$  est un polynôme de degré 4.

$P_3(z) = 12z^7$  est un **monôme** de degré 7.

### Remarque :

On admet (ce qui est du bon sens) qu'un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

### 3) FACTORISATION DES POLYNÔMES

#### Définition :

On dit qu'un polynôme  $P$  est factorisable ( ou divisible ) par  $z-a$  s'il existe un polynôme  $Q$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

#### Exemple :

$P(z) = 4z^2 - 25$  est factorisable par  $2z-5$ . En effet  $P(z) = (2z-5)(2z+5)$

#### Propriété :

Soit un complexe  $a$  et  $n$  un entier naturel .

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^n - a^n$  est factorisable par  $z-a$  et :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + a z^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2} z + a^{n-1}) = (z-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

#### Preuve : exigible

Si  $a=0$ , la propriété est évidente.

Supposons maintenant  $a \neq 0$ .

Dans les complexes, les propriétés calculatoires sont identiques à celles que nous avons dans  $\mathbb{R}$ .

On en déduit donc que la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique reste vraie dans  $\mathbb{C}$ .

Pour tout nombre complexe  $q$ , on a donc :

$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow 1-q^n = (1-q)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) \Rightarrow q^n - 1 = (q-1)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$$

En remplaçant  $q \neq 1$  par  $\frac{z}{a}$  dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{a}\right)^n - 1 &= \left(\frac{z}{a} - 1\right) \left(1 + \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}\right) \\ \Rightarrow \frac{z^n}{a^n} - 1 &= \left(\frac{z}{a} - 1\right) \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right) \\ \Rightarrow \frac{z^n - a^n}{a^n} &= \left(\frac{z-a}{a}\right) \left(\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{a^{n-2}z}{a^{n-1}} + \frac{a^{n-3}z^2}{a^{n-1}} + \dots + \frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right) \\ \Rightarrow \frac{z^n - a^n}{a^n} &= \frac{(z-a)(a^{n-1} + a^{n-2}z + a^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1})}{a a^{n-1}} \\ \Rightarrow \frac{z^n - a^n}{a^n} &= \frac{(z-a)(a^{n-1} + a^{n-2}z + a^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1})}{a^n} \\ \Rightarrow z^n - a^n &= (z-a)(a^{n-1} + a^{n-2}z + a^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1}) \end{aligned}$$

#### Propriété :

Soit un complexe  $a$ .

Un polynôme  $P$  est factorisable par  $z-a$  si et seulement si  $a$  est une racine de  $P$ .

**Preuve : exigible**

Si P est factorisable par  $z - a$ , il est immédiat que  $a$  est une racine de P.

Montrons la réciproque :

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ .

On peut donc écrire P sous la forme  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des réels.

On a alors  $P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0$  et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(z) - P(a) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 - (a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0) \\
&= a_n (z^n - a^n) + a_{n-1} (z^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_1 (z - a)
\end{aligned}$$

Or d'après la propriété précédente, il existe des polynômes  $Q_n, Q_{n-1}, \dots, Q_2$  tels que :

$$z^n - a^n = (z - a)Q_n, \quad z^{n-1} - a^{n-1} = (z - a)Q_{n-1}, \quad \dots, \quad z^2 - a^2 = (z - a)Q_2$$

On en déduit que :

$$P(z) - P(a) = a_n (z - a)Q_n + a_{n-1} (z - a)Q_{n-1} + \dots + a_2 (z - a)Q_2 + (z - a) = (z - a)(a_n Q_n + a_{n-1} Q_{n-1} + \dots + a_2 Q_2 + 1)$$

Ainsi  $P(z) - P(a)$ , c'est à dire  $P(z)$  (étant donné que  $P(a) = 0$ ) est bien factorisable par  $z - a$

**4) DEGRÉ ET RACINES**

**Propriété :**

Un polynôme non nul P, de degré  $n$ , admet au plus  $n$  racines.

**Preuve : exigible**

Soit la propriété  $H(n)$  : «L'équation  $P(z) = 0$ , où P est un polynôme de degré  $n$  a un nombre de solutions inférieur ou égal à  $n$  », où  $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Toute équation du premier degré du type  $az + b = 0$  a au plus une solution. Donc  $H(1)$  est vraie.

**Hérédité :**

On suppose  $H(n)$  vraie pour un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 fixé, c'est à dire :

L'équation  $P(z) = 0$ , où P est un polynôme de degré  $n$  a un nombre de solutions inférieur ou égal à  $n$ . (HR)

Montrons que  $H(n+1)$  est vraie, c'est à dire :

L'équation  $P(z) = 0$ , où P est un polynôme de degré  $n+1$  a un nombre de solutions inférieur ou égal à  $n+1$ .

- Si P n'a pas de racines, alors l'équation  $P(z) = 0$  a bien sûr moins de  $n+1$  solutions.

- Si P a au moins une racine complexe  $a$ , alors il existe un polynôme Q de degré  $n$  tel que  $P(z) = (z - a)Q(z)$ . On a alors :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - a = 0 \text{ ou } Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = a \text{ ou } Q(z) = 0$$

D'après (HR), comme Q est de degré  $n$ , l'équation  $Q(z) = 0$  a au plus  $n$  solutions.

On en déduit que l'équation  $P(z) = 0$  a au plus  $n+1$  solutions et que  $H(n+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

$H(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Remarque :** On pourra utiliser en exercice, que dans les complexes un polynôme non nul P, de degré  $n$ , admet en fait exactement  $n$  racines.