LES NOMBRES COMPLEXES : ÉQUATIONS POLYNOMIALES

1) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

Propriété :

L'équation $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des réels (avec $a\neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta\geqslant 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta<0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :
$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme az^2+bz+c peut alors se factoriser sous la forme $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Preuve :

On considère l'équation $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des réels (avec $a\neq 0$)

On peut écrire $az^2+bz+c=a\left(z^2+\dfrac{b}{a}z+\dfrac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement .

  Comme $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta=0$, l'équation a une solution réelle $z=-\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta<0$, $-\Delta>0$ et on peut écrire : $-\Delta=\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$, donc $\Delta=-\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2=i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2=\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

  on obtient alors :
$$a z^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}\right)=a\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$
  On en déduit que l'équation $az^2+bz+c=0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme az^2+bz+c sous la forme $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

2) POLYNÔMES

Définitions :

Soit un entier naturel n et a_0, a_1, …, a_n des réels.
Une **fonction polynôme à coefficients réels** (ou **polynôme**), est une fonction souvent notée P définie sur $\mathbb{C}$ qui admet une unique écriture sous la forme :
$$\text{P}(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$$

Le **polynôme nul** est le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $\text{P}(z)=0$.

Si P n'est pas le polynôme nul, n est le **degré** de P

On appelle **racine** du polynôme P tout nombre complexe z_0 tel que $\text{P}(z_0)=0$.

Exemples :

$\text{P}_1(z)=5$ est un polynôme constant de degré 0.

$\text{P}_2(z)=5z^4-2z^2+1$ est un polynôme de degré 4.

$\text{P}_3(z)=12z^7$ est un **monôme** de degré 7.

Remarque :

On admet (ce qui est du bon sens) qu'un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

3) FACTORISATION DES POLYNÔMES

Définition :

On dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$$

Exemple :

$\mathrm{P}(z)=4z^2-25$ est factorisable par $2z-5$. En effet $\mathrm{P}(z)=(2z-5)(2z+5)$

Propriété :

Soit un complexe a et n un entier naturel .
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, z^n-a^n est factorisable par $z-a$ et :

$$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+a\,z^{n-2}+a^2z^{n-3}+\ldots+a^{n-2}z+a^{n-1})=(z-a)\sum_{k=0}^{n-1}a^k z^{n-1-k}$$

Preuve : ***exigible***

Si $a=0$, la propriété est évidente.

Supposons maintenant $a\neq 0$.

Dans les complexes, les propriétés calculatoires sont identiques à celles que nous avons dans $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique reste vraie dans $\mathbb{C}$.

Pour tout nombre complexe $q\neq 1$, on a donc :

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q} \quad\Rightarrow\quad 1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) \quad\Rightarrow\quad q^n-1=(q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$$

En remplaçant q par $\frac{z}{a}$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\left(\frac{z}{a}\right)^n-1=\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n}{a^n}-1=\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n-a^n}{a^n}=\left(\frac{z-a}{a}\right)\left(\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{a^{n-2}z}{a^{n-1}}+\frac{a^{n-3}z^2}{a^{n-1}}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n-a^n}{a^n}=\frac{(z-a)(a^{n-1}+a^{n-2}z+a^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1})}{a\,a^{n-1}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n-a^n}{a^n}=\frac{(z-a)(a^{n-1}+a^{n-2}z+a^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1})}{a^n}$$

$$\Rightarrow\quad z^n-a^n=(z-a)(a^{n-1}+a^{n-2}z+a^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1})$$

Propriété :

Soit un complexe a .
Un polynôme P est factorisable par $z-a$ si et seulement si a est une racine de P .

Preuve : *exigible*

Si P est factorisable par $z-a$, il est immédiat que a est une racine de P .

Montrons la réciproque :

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n .

On peut donc écrire P sous la forme $\mathrm{P}(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$ où a_0 , a_1 , …, a_n sont des réels.

On a alors $\mathrm{P}(a)=a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+\ldots+a_1 a+a_0$ et on peut écrire :

$$\mathrm{P}(z)-\mathrm{P}(a)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0-(a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+\ldots+a_1 a+a_0)$$

$$=a_n(z^n-a^n)+a_{n-1}(z^{n-1}-a^{n-1})+\ldots+a_1(z-a)$$

Or d'après la propriété précédente, il existe des polynômes Q_n , Q_{n-1} , …, Q_2 tels que :

$$z^n-a^n=(z-a)\mathrm{Q}_n\ ,\ z^{n-1}-a^{n-1}=(z-a)\mathrm{Q}_{n-1}\ ,\ \ldots\ ,\ z^2-a^2=(z-a)\mathrm{Q}_2$$

On en déduit que :

$$\mathrm{P}(z)-\mathrm{P}(a)=a_n(z-a)\mathrm{Q}_n+a_{n-1}(z-a)\mathrm{Q}_{n-1}+\ldots+a_2(z-a)\mathrm{Q}_2+(z-a)=(z-a)(a_n\mathrm{Q}_n+a_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}+\ldots+a_2\mathrm{Q}_2+1)$$

Ainsi $\mathrm{P}(z)-\mathrm{P}(a)$, c'est à dire $\mathrm{P}(z)$ (étant donné que $\mathrm{P}(a)=0$) est bien factorisable par $z-a$

4) DEGRÉ ET RACINES

Propriété :

Un polynôme non nul P , de degré n , admet au plus n racines.

Preuve : *exigible*

Soit la propriété $\mathrm{H}(n)$: «L'équation $\mathrm{P}(z)=0$, où P est un polynôme de degré n a un nombre de solutions inférieur ou égal à n », où $n\in\mathbb{N}^*$

Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Toute équation du premier degré du type $az+b=0$ a au plus une solution . Donc $\mathrm{H}(1)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose $\mathrm{H}(n)$ vraie pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1 fixé , c'est à dire :

L'équation $\mathrm{P}(z)=0$, où P est un polynôme de degré n a un nombre de solutions inférieur ou égal à n . (HR)

Montrons que $\mathrm{H}(n+1)$ est vraie, c'est à dire :

L'équation $\mathrm{P}(z)=0$, où P est un polynôme de degré $n+1$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $n+1$.

- Si P n'a pas de racines, alors l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ a bien sûr moins de $n+1$ solutions.

- Si P a au moins une racine complexe a , alors il existe un polynôme Q de degré n tel que $\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$. On a alors :

$$\mathrm{P}(z)=0 \iff z-a=0 \text{ ou } \mathrm{Q}(z)=0 \iff z=a \text{ ou } \mathrm{Q}(z)=0$$

D'après (HR), comme Q est de degré n , l'équation $\mathrm{Q}(z)=0$ a au plus n solutions.

On en déduit que l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ a au plus $n+1$ solutions et que $\mathrm{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$\mathrm{H}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Remarque : On pourra utiliser en exercice, que dans les complexes un polynôme non nul P , de degré n , admet en fait exactement n racines.