

Équations**Ex 4-1 : Équations du second degré**Résoudre dans \mathbb{C} les équations ci-dessous .

1) $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) $2z^2 - 2z + 3 = 0$

3) $2z^2 - 2z - 3 = 0$

4) $z + \frac{1}{z} = 1$

5) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$

6) $\frac{z-1}{z+2} = z$

Ex 4-2 : Équation de degré 3 : factorisation immédiateRésoudre dans \mathbb{C} l'équation $3z^3 - 2z^2 + z = 0$ (E)**Ex 4-3 : Équation de degré 4 : se ramener à un équation du second degré**Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$ (E).

Ex 4-4 : Avec l'inverse : se ramener à un équation du second degré

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 2 = 0$.

Ex 4-5 : Système

Résoudre dans \mathbb{C} le système $\begin{cases} z + z' = 6 \\ zz' = 12 \end{cases}$

Ex 4-6 : Équation de degré 4 : images des solutions sur un cercle

Soit $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$.

1) Trouver deux réels a et b tels que $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$.

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

3) Soit A, B, C et D les images des solutions de l'équation précédente. Montrer que ces points sont sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Ex 4-7 : Somme et produit des racines

1) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$.

Montrer que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

2) Soit z_1 et z_2 deux nombres de produit $P \neq 0$ et de somme S .
Montrer que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

3) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation $2z^2 - 3z + 3 = 0$.
Sans résoudre l'équation, calculer le module de $z_1^{-1} + z_2^{-1}$.

Factorisation

Ex 4-8 : Factoriser des polynômes du second degré

Factoriser les polynômes ci-dessous dans \mathbb{C} :

1) $P(z) = z^2 + 9$

2) $Q(z) = 2z^2 + 2z + 1$

3) $R(z) = 3z^2 + \sqrt{3}z + 1$

Ex 4-9 : Factoriser un polynôme de degré 3

Soit $P(z) = z^3 + 6z^2 + 13z + 10$

1) Calculer $P(-2)$

2) En déduire une factorisation de $P(z)$ dans les réels.

Ex 4-10 : Factoriser un polynôme de degré 3

Soit $Q(z) = 8z^3 - 1$. En factorisant, résoudre l'équation $Q(z) = 0$ dans \mathbb{C} .

Ex 4-11 : Factoriser un polynôme de degré 4

Soit $P(z) = z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 5z + 6$.

1) Démontrer que pour tout complexe z , on a : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$

2) Déterminer une racine imaginaire pure évidente de P .

3) Quelle autre racine la question 1 permet-elle de trouver ?

4) Factoriser $P(z)$ dans les réels.

Ex 4-12 : Factoriser un polynôme de degré 4

Soit $P(z) = z^4 + 6z^3 + 15z^2 + 18z$

1) Déterminer un réel a tel que $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + a(z^2 + 3z)$

2) Factoriser $P(z)$ dans les réels et résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans \mathbb{C}

Ex 4-13 : Factoriser un polynôme de degré 4

Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 8z + 32$

1) Démontrer que $2i$ et $-2i$ sont des racines de P .

2) Justifier que $P(z)$ peut être factorisé par $z^2 + 4$.

3) Déterminer l'ensemble des racines de P dans les complexes.

Avec des coefficients complexes

Ex 4-14 : Racines carrées d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe $c = a + ib$ où a et b sont des réels.

On cherche les éventuels nombres complexes vérifiant l'équation $z^2 = c$ (E)

1) Cas où $b = 0$:

a) Que peut-on dire de la nature de c ?

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes solutions de (E).

2) Cas où $b \neq 0$:

On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels.

a) Montrer que si x et y existent alors :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

b) Montrer que $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

c) En déduire x^2 et y^2 .

d) Que peut-on dire du signe de x et y si $b > 0$?

En déduire que (E) a deux solutions et exprimer les solutions en fonction de a et b .

e) En procédant de la même façon, traiter le cas $b < 0$.

Ex 4-15 : Application de l'exercice précédent

1) Déterminer les solutions de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ (E_1)

2) Soit le polynôme $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$

a) Combien P a-t-il de racines au maximum ?

b) Résoudre l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ (E).

c) En déduire l'ensemble des racines de P.

d) Justifier que les racines obtenues sont constituées de deux paires de racines conjuguées.

Ex 4-16 : Factoriser un polynôme de degré 3

Soit $R(z) = z^3 - (1+i)z + z - 1 - i$

1) Trouver une racine évidente de R.

2) En déduire une factorisation de R dans \mathbb{C} .

Ex 4-17: Équation de degré 3 à coefficients complexes

Soit $P(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

1) Calculer $P(-i)$.

2) Trouver deux nombres réels a et b tels que $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$.

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

Sur tout le chapitre des complexes**Ex 4-18 : Baccaauréat S – Antilles-Guyane 11 septembre 2014 – ex 4**

Complexes – équations – ensembles de points

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Ex 4-19 : Baccalauréat S – Asie 16 juin 2015 – ex 4Complexes – le nombre j – géométrieLe plan est muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.**Partie A : propriétés du nombre j**

1. a. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

- b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
- a. $j^3 = 1$;
- b. $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que $AC = BC$.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

