

LES NOMBRES COMPLEXES : UTILISATION

1) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $\frac{c-a}{b-a}$

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Propriétés :

Soit A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c et d . On a :

- $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overline{AB}, \overline{AC}) [2\pi]$

Preuve :

- On a bien $a \neq b$ car les points sont distincts. On a alors :

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB}$$

- La preuve de la deuxième propriété nécessite de connaître quelques propriétés des angles orientés de vecteurs qui sont faciles à mettre en place en faisant un schéma.

Soit \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :

- Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) [2\pi]$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &= \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \overline{AC}) - (\vec{u}, \overline{AB}) [2\pi] \\ &= -(\vec{u}, \overline{AB}) + (\vec{u}, \overline{AC}) [2\pi] \\ &= (\overline{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overline{AC}) [2\pi] \\ &= (\overline{AB}, \overline{AC}) [2\pi] \quad (\text{D'après la relation de Chasles}) \end{aligned}$$

Remarques :

Soit A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c et d . On a :

- A appartient à la médiatrice de [BC] si et seulement si $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1$
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0 \text{ } [2\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ } [2\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

2) RACINES n-ièmes DE L'UNITÉ

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle racine n -ième de l'unité, tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

1 est bien sûr toujours une racine n -ième de l'unité

Remarque :

Les racines n -ième de l'unité sont les racines du polynôme $P(z) = z^n - 1$

Propriété et définition :

Soit n un entier naturel non nul.

L'équation $z^n = 1$ admet exactement n racines n -ièmes de l'unité distinctes.

Il s'agit des nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

On note U_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité

$$U_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \right\}$$

Preuve :

Soit n un entier naturel non nul et un complexe $z = r e^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow (r e^{i\theta})^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi tous les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation $z^n = 1$.

En particulier les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sont bien sûr solutions.

Soit K un entier quelconque.

En effectuant la division euclidienne de K par n , on obtient.

$$K = qn + r \text{ où } r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ et } q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ainsi } e^{i\frac{2K\pi}{n}} = e^{i\frac{2(qn+r)\pi}{n}} = e^{i2q\pi} e^{i\frac{2r\pi}{n}} = e^{i\frac{2r\pi}{n}}$$

On retrouve donc une solution de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ et on en déduit le résultat attendu.

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul.
Les points images des éléments de U_n appartiennent au cercle trigonométrique.
Pour $n \geq 3$, les points images des éléments de U_n sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

Ce qui est trivial, car ils ont pour module 1.

Quelques cas particuliers :

- Les racines 2-ièmes (ou racines carrées) de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^2 = 1$. Dans ce cas on trouve facilement -1 et 1. On a $U_2 = \{-1; 1\}$

- Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^3 = 1$.

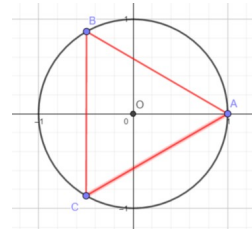
Les solutions sont les nombres complexes :

$$e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{3}} = e^0 = 1, \quad e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } e^{i\frac{2 \times 2 \times \pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

On note :

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}. \text{ On a alors } \bar{j} = e^{i\frac{4\pi}{3}}. \text{ Ainsi } U_3 = \{1, j, \bar{j}\}$$

Les points images des éléments de U_3 sont les sommets du triangle équilatéral ABC.



- Les racines 4-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^4 = 1$.

Dans ce cas on peut factoriser facilement pour déterminer les racines de l'unité :

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0$$

$$\text{Ainsi } U_4 = \{1; i; -1; -i\}$$

Les points images des éléments de U_4 sont les sommets du carré ABCD.

