Interprétation géométrique de :

$$\frac{c-a}{b-a}$$

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit A, B , C et D quatre points distincts d'affixes respectives a , b , c et d . On a :

- $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{\text{AC}}{\text{AB}}$
- $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=(\overrightarrow{\text{AB}}\,,\overrightarrow{\text{AC}})\ [2\pi]$

Remarques importantes :

- A appartient à la médiatrice de [BC] si et seulement si $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0\ [\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est **un réel**.
- Les droites (AB) et CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un **imaginaire pur**.

Racines *n*-ième de l'unité :

Les racines n-ième de l'unité sont les racines du polynôme $P(z)=z^n-1$

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **racine *n*-ième de l'unité**, tout nombre complexe z vérifiant $z^n=1$.

1 est bien sûr toujours une racine n-ième de l'unité

Soit n un entier naturel non nul.
L'équation $z^n=1$ admet exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes.
Il s'agit des nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$

On note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité .

$$U_n=\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}},k\in\{0,1,2,\dots n-1\}\right\}$$

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul.
Les points images des éléments de U_n appartiennent au cercle trigonométrique.

Pour $n\geqslant 3$, les points images des éléments de U_n sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

Quelques cas particuliers :

- **Les racines 2-ièmes (ou racines carrées) de l'unité** sont les nombres complexes tels que $z^2=1$.
  Dans ce cas on trouve facilement -1 et 1 . On a $U_2=\{-1;1\}$

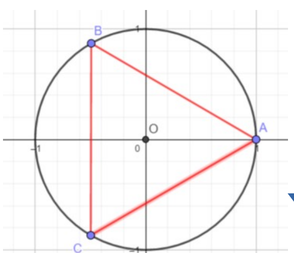
- **Les racines 3-ièmes de l'unité** sont les nombres complexes tels que $z^3=1$.

  Les solutions sont les nombres complexes : $e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}}=e^0=1$, $e^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

  On note : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

  On a alors $\bar{j}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi $U_3=\{1,j,\bar{j}\}$

  Les points images des éléments de U_3 sont les sommets du triangle équilatéral ABC.



- **Les racines 4-ièmes de l'unité** sont les nombres complexes tels que $z^4=1$.

  Dans ce cas on peut factoriser facilement pour déterminer les racines de l'unité :

  $$z^4=1 \Leftrightarrow z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$$

  Ainsi $U_4=\{1;i;-1;-i\}$

  Les points images des éléments de U_4 sont les sommets du carré ABCD.