Dans toute la fiche d'exercice, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$)

Interprétation géométrique du module et de l'argument

Ex 5-1 : ***Comprendre la formule de l'argument d'un quotient***

Dans chacun des cas déterminer une mesure en radian de ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) où A et B sont deux points du plan complexe.

1) $A(-4)$ et $B(-2i)$

2) $A(\sqrt{3}+i)$ et $B(1-i\sqrt{3})$

3) $A(4+6i)$ et $B(-3+2i)$

Ex 5-2 : ***Comprendre la formule de l'argument d'un quotient***

Dans chacun des cas déterminer une mesure en radian de ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) où A, B et C sont trois points du plan complexe, puis déduire des calculs le rapport $\frac{AC}{AB}$.

1) $A(3+2i)$, $B(6+4i)$ et $C(1+5i)$

2) $A(2-5i)$, $B(3-6i)$ et $C(4-7i)$

3) $A(3-i)$, $B(5-i)$, et $C(5-3i)$

Ex 5-3 : ***Valider ou infirmer une conjecture géométrique***

Dans le plan complexe, on considère les points $A(3+4i)$, $B(-5-6i)$ et $C(11-2i)$.

1) Placer ces trois points, et conjecturer la nature du triangle ABC.

2) Écrire sous forme algébrique $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$, puis valider ou infirmer la conjecture précédente.

Ex 5-4 : ***Valider ou infirmer une conjecture géométrique***

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+5i)$, $B(7,5+4,5i)$, $C(7-2i)$ et $D(0,5-1,5i)$.

1) Placer ces quatre points, et conjecturer la nature du quadrilatère ABCD.

2) Valider ou infirmer la conjecture précédente.

Ex 5-5 : ***Ensemble de points, arguments et angles orientés de vecteurs***

Soit A,B,C et D les points d'affixes $z_A=1$, $z_B=i$, $z_C=-1$ et $z_D=-i$.

Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant la condition donnée et tracer cet ensemble dans un repère.

1) $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$)

2) $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)=2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$)

3) $\arg\left(\frac{z+i}{z+1}\right)=\pi+2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$)

4) $\frac{z+i}{z-1}$ soit un imaginaire pur.

Ex 5-6 : ***Vecteurs orthogonaux, points alignés,*** $\Re\mathrm{e}(z'\bar{z})$ ***et*** $\Im\mathrm{m}(z'\bar{z})$

Soit M et M' d'affixes $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x , y , x' et y' sont des nombres réels. En utilisant $\frac{z'}{z}$, montrer que :

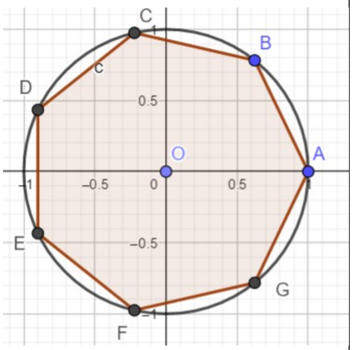
1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$ sont orthogonaux si, et seulement si , $\Re\mathrm{e}(z'\bar{z})=0$

2) O , M et M' sont alignés si, et seulement si $\Im\mathrm{m}(z'\bar{z})=0$

Racines n-ième de l'unité

Ex 5-7 : ***Heptagone et affixe des sommets***

Soit l'heptagone régulier ABCDEFG



Donner l'affixe de chacun de ses sommets sous forme exponentielle.

Ex 5-8 : ***Représenter les solutions de*** $\mathbb{U}_n$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous, puis tracer le polygone dont les sommets ont pour affixes ces solutions.

1) $z^8=1$

2) $z^{12}=1$

Ex 5-9 : ***Utiliser les racines n-ièmes de l'unité pour résoudre une équation***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations c-dessous **:**

1) $(z-i)^4=1$

2) $z^5=4\sqrt{2}$

3) $z^6=(2-i)^6$

Ex 5-10 : ***Utiliser les racines n-ièmes de l'unité pour résoudre une équation***

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-28+96i=0\,(\mathrm{E})$.

1) Montrer que $z_0=3-i$ est une solution de (E)

2) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation $z^4={z_0}^4$

3) Résoudre (E).

Ex 5-11 : ***Utiliser les racines n-ièmes de l'unité pour résoudre une équation***

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=1$.

2) Soit z un nombre complexe . On pose $z=\frac{u-1}{u+1}$ (avec $u\neq -1$) .

Exprimer u en fonction de z .

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(u-1)^4=(u+1)^4$.

Ex 5-12 : ***Somme des racines n-ièmes de l'unité***

1) Soit $\omega\in U_7$ tel que $\omega\neq 1$.

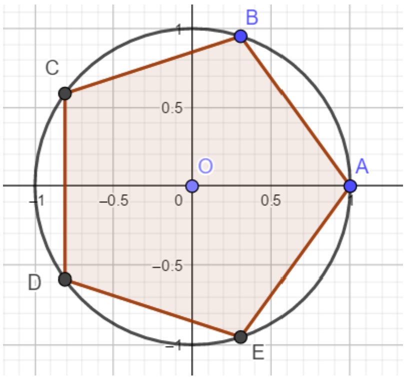
Montrer que $\omega^k\in U_7$ pour tout $k\in\{0,1,\dots,6\}$

On admet la réciproque, ce qui signifie que l'ensemble U_7 est constitué des complexes ω^k avec $k\in\{0,1,\dots,6\}$ où ω est un élément quelconque de U_7 .

2) Justifier que la somme des éléments de U_7 est nulle.

Ex 5-13 : ***Construction à la règle non graduée et au compas d'un pentagone régulier***

Le but de l'exercice est de construire à la règle non graduée et au compas le pentagone régulier ci-contre.



1) On considère les points K(-1) et $J\left(\frac{i}{2}\right)$.

Le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment [KJ] en L.

Calculer les longueurs KJ et KL.

2) Donner sous forme exponentielle l'affixe de C.

3) Montrer que $KC^2=2+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

4) La calculatrice affiche :

$$\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{5}\right) \qquad \frac{-\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$$

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \qquad \frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$$

En utilisant les résultats de la calculatrice, montrer que $KC=KL$

5) Dans le plan complexe, construire à la règle non graduée et au compas un pentagone régulier.

Fonctions dans les complexes

Ex 5-14 :

Soit I le point d'affixe $2i$ et f la fonction qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=iz$.

1) a) Déterminer l'affixe du point A' , l'image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+i$.

b) Montrer que A, I et A' sont alignés.

2) a) Montrer que les points M du plan tels que M, I et M' soient alignés sont sur le cercle Γ de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Montrer que $A\in\Gamma$.

c) Déterminer l'ensemble Γ' décrit par le point M' lorsque le point M décrit Γ .

3) Soit B le point d'affixe $2+2i$ et B' son image par f .

a) Montrer que $(AB)\perp(A'B')$

b) Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_A}$ puis en déduire la nature du quadrilatère $OACA'$.

Ex 5-15 :

Soit les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 et f la fonction qui à tout point M (différent de A) d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2}$.

1) a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1+i$.

b) Montrer que $(AP) // (BP')$.

c) Montrer que $(AP) \perp (PP')$.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

On cherche maintenant à généraliser les propriétés 1b) et 1c) pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z, $(z-2)(\bar{z}-2) \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2} \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $(AM) // (BM')$.

4) Soit M un point quelconque tel que $M \notin (AB)$. Généraliser le résultat de la question 1c)

5) Soit M un point distinct de A. déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f.
Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2i$.