Divisibilité

Ex 6-1 : ***Trouver des multiples***

1) Déterminer le nombre de multiples de 19 compris entre 1000 et 3000.

2) Déterminer le nombre de multiples de 47 compris entre -2000 et 1000.

Ex 6-2 : ***Sommes de nombres pairs et impairs***

1) Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

2) Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

Ex 6-3 : ***Somme de nombres impairs consécutifs***

Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.

Ex 6-4 : ***Multiple de 3***

Soit a et b deux entiers tels que a est un multiple de 9 et b est un multiple de 15.

Montrer que $a+b$ est un multiple de 3.

Ex 6-5 :

Soit a et b deux entiers.

1) Montrer que si a est un diviseur de $a+b$, alors a est un diviseur de b .

2) Montrer que si a est un diviseur de b , alors a^2 est un diviseur de b^2 .

Ex 6-6 :

Existe-t-il un entier naturel multiple de 14 et diviseur de 100 ?

Ex 6-7 :

Montrer que si 13 est un diviseur de a , alors 13 est un diviseur de a^2 .

Ex 6-8 :

Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n-5$ divise $n+3$

Ex 6-9 :

Soit un entier naturel n . Montrer que si un entier a divise $15n+2$ et $10n+7$, alors a divise 17.

Ex 6-10 : Vrai ou faux

Justifier ou donner un contre-exemple.

1) Si un entier a divise un entier b et un entier c , alors a^2 divise bc .

2) Si le carré d' un entier a divise un entier b , alors a divise $\sqrt{b}$.

3) Si un entier m , divise un entier a , il existe alors un entier n tel que $a=m\times n$. Ainsi, un entier naturel a a toujours un nombre pair de diviseurs positifs.

Ex 6-11 : $\overline{aaaaaa}$

On note $\overline{aaaaaa}$ le nombre formé de 6 chiffres a .

1) Montrer que pour tout chiffre a , $\overline{aaaa}$ est divisible par 101.

2) Montrer que pour tout chiffre a et b , $\overline{aaabbb}$ est divisible par 37.

Ex 6-12 : ***Montrer une divisibilité en utilisant la récurrence***

Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11.

Divisibilité et équation dans les entiers

Ex 6-13 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2=y^2+17$ (E).

Ex 6-14 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3xy-y^2=25$

Ex 6-15 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3x+24y=17$

Division euclidienne

Ex 6-16 :

1) Effectuer la division euclidienne de $a=1257$ par $b=13$.

2) En déduire la division euclidienne de 1257 par 32.

3) En déduire la division euclidienne de -1257 par 96

Ex 6-17 : **QCM**

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s)
Le reste de la division d'un entier par 4 peut être :

a) 5 b) 1 c) -2 d) 2,5 e) 4

Ex 6-18 :

1) Soit $a=4k+5$ ($k\in\mathbb{N}^*$).
Quel est le reste de la division euclidienne de a par 4 ?

2) On sait que le reste de la division euclidienne d'un entier naturel b par 5 est 3 . Comment peut-on écrire b ?

Ex 6-19 :

Trouver un entier naturel qui, divisé par 13, donne pour reste 9, et divisé par 15, donne le même quotient et pour reste 1.

Ex 6-20 :

Soit a et b deux entiers naturels.
Dans la division euclidienne de a par 11, le reste est 8.
Dans la division euclidienne de b par 11, le reste est 3.
Donner le reste de la division euclidienne de :

1) $a+b$ par 11

2) a^2 par 11

Ex 6-21 :

Trouver une division euclidienne dont le quotient est 100, le reste 13 et où le dividende est inférieur à 900.

Ex 6-22 : ***Division euclidienne de a(n) par b(n)***

Soit un entier naturel n .
Déterminer suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de $9n+17$ par $2n+3$.

Ex 6-23 : ***Partitionnement des entiers naturels***

1) Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 3 ?

2) Justifier que tout entier naturel a peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ (où $k\in\mathbb{N}$)

3) Montrer que tout entier naturel a peut s'écrire sous l'un des formes suivantes : $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$ (où $k\in\mathbb{N}$)

4) Montrer que le produit de 4 entiers naturels consécutifs est divisible par 4.

5) Que peut-on dire du produit de n ($n \in \mathbb{N}^*$) entiers naturels consécutifs ?

Congruences

Ex 6-24 : ***Simplifier des congruences***

Pour chaque valeur de a , trouver un entier b tel que :

$$b \equiv a[5] \text{ et } -2 \leqslant b \leqslant 2$$

1) $a=11$

2) $a=29$

3) $a=-12$

4) $a=-105$

Ex 6-25 : ***Produit nul et congruence***

Soit a , b et n trois entiers naturels tels que $a \equiv b[n]$.

1) Montrer que si $a \equiv 0[n]$, alors $a \times b \equiv 0[n]$

2) Montrer que $4 \times 9 \equiv 0[6]$

3) Peut-on dire que si $a \times b \equiv 0[n]$, alors $a \equiv 0[n]$ ou $b \equiv 0[n]$?

Ex 6-26 : ***Calculer un reste avec des congruences***

Déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 de :

1) $841^{120} \times 99^{35}$

2) $100^{85} - 44^{85}$

Ex 6-27 : ***Calculer un reste avec des congruences***

Montrer sans calcul, ni calculatrice que :

1) $17^{51} - 3^{51} \equiv 0[14]$

2) $13^{30} - 9^{30} \equiv 0[11]$

Ex 6-28 : ***Calculer un reste avec des congruences***

Soit a et b deux entiers tels que $a \equiv 3[5]$ et $b \equiv 4[5]$
Déterminer le reste de la division euclidienne de $11a^2 + 3b^2$ par 5.

Ex 6-29 : ***Calculer un reste avec des congruences***

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2017^{2431} par 5.

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2110^{2011} par 7.

Ex 6-30 : ***Utiliser un tableau de congruences***

En complétant le tableau ci-dessous, déterminer les différents restes possibles de la division euclidienne de x^4 par 5.

$x[5]$	-2	-1	0	1	2
$x^2[5]$					
$x^4[5]$					

Ex 6-31 : ***Résoudre dans $\mathbb{Z}$ une équation module n***

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1) $\begin{cases} x \equiv 4[7] \\ 0 < x < 30 \end{cases}$

2) $7x \equiv 3[11]$

3) $5x \equiv 3[10]$

4) $5x \equiv 5[10]$

5) $5x+24 \equiv 55[7]$

6) $9x-24 \equiv 6x-46[17]$

Ex 6-32 : ***Résoudre une équation avec les congruences***

On considère dans $\mathbb{Z}^2$: $3x^2+5y^2=16$ (E)

1) Montrer que si un couple $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de l'équation (E), alors $3x^2 \equiv 1[5]$.

2) Déterminer les restes de la division de $3x^2$ par 5 et conclure.

Ex 6-33 :

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $N = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est un multiple de 17

Ex 6-34:

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $N = n^3 - 3n + 5$

1) Déterminer les entiers n tels que $N \equiv 0[7]$

2) Déterminer les entiers n tels que $N \equiv 1[7]$

Ex 6-35 :

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{227505} par 5.

Ex 6-36 :

Montrer que $N = n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6 pour tout entier naturel.

Ex 6-37 : ***Baccalauréat S nouvelle Calédonie mars 2016 – ex 4***

Congruences – cryptographie – suites

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).
Exemple :
M correspond à $x = 12$
$7 \times 12 + 5 = 89$
Or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.

2. **a.** Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x\ [26]$ alors $15k \equiv x\ [26]$.

b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

c. En déduire que $y \equiv 7x+5\ [26]$ équivaut à $x \equiv 15y+3\ [26]$.

3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$.
On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,
$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$.

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.
Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.
Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.
Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.

Ex 6-38 : ***Baccalauréat S Polynésie 14 juin 2017 – ex 4***

Congruences – cryptographie

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

— À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.

— Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8?41	0,89	0,00	5,33	3,23

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14\ [26] \\ b \equiv 4\ [26]. \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ,\ b)$ ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.

   a. Coder les lettres K et X.

   b. Ce codage est-il envisageable?

2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

   a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$m \equiv 9n + 4\ [26] \iff n \equiv 3m + 14\ [26]$$

   h) Décoder le mot AQ.