

PGCD**Ex 7-1 :**

1) Déterminer l'ensemble $D(54)$ des diviseurs positifs de 54 et $D(270)$ l'ensemble des diviseurs positifs de 270.

2) En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 54 et 270, puis le PGCD de 54 et 270

Ex 7-2 :

1) Vérifier que $5 \times 181 - 8 \times 113 = 1$

2) En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 181 et 113, puis le PGCD de 181 et 113.

Ex 7-3 : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - c ; b - c)$?

Soit a , b et c trois entiers.

La proposition $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - c ; b - c)$ est-elle vraie ? Justifier.

Ex 7-4 :

Soit n un entier naturel et les entiers $a = n + 2$ et $b = 3n + 1$.

1) Montrer que si d divise a et b , alors d divise 5.

2) En déduire les valeurs possibles du PGCD de a et b .

Ex 7-5 :

Déterminer les entiers naturels non nuls a tels que :

$$\text{PGCD}(261 ; a) = 87 \text{ et } a < 261$$

Utiliser $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - kb ; b)$ **Ex 7-6 :**

Montrer que $\text{PGCD}(1671 ; 1669) = 1$.

Ex 7-7 :

Montrer que deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.

Ex 7-8 : PGCD de $a(n)$ et $b(n)$

Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n les valeurs de :

1) $\text{PGCD}(n ; 3n + 17)$

2) $\text{PGCD}(5n + 4 ; 3n - 1)$

3) PGCD($2n+15; n+3$)**Ex 7-9 : Montrer l'égalité de deux PGCD**

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On pose $A=5a+9b$ et $B=4a+7b$

Montrer que $\text{PGCD}(A; B) = \text{PGCD}(a; b)$

Algorithme d'Euclide et conséquences**Ex 7-10 : Appliquer l'algorithme**

Déterminer le PGCD de 13234 et de 4568

Vérifier avec la calculatrice.

Ex 7-11 : Programmation de l'algorithme d'Euclide

En utilisant l'instruction python $a\%b$ qui donne le reste de la division euclidienne de a par b , compléter l'algorithme ci-dessous qui applique l'algorithme d'Euclide.



```

1 a=int(input("a="))
2 b=int(input("b="))
3 if ( ..... ):
4     (a,b)=(b,a)
5 while ( ..... ):
6     r=.....
7     a=.....
8     b=.....
9 print(.....)

```

$(a,b)=(b,a)$ permet d'échanger a et b

Ex 7-12 : Recherche des diviseurs communs

1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD de 2002 et de 4598.

2) En déduire $D(2002,4598)$ l'ensemble des diviseurs communs positifs de 2002 et de 4598.

Ex 7-13 : Recherche des diviseurs communs

Soit n un entier naturel tel que :

- dans la division euclidienne de 2791 par n , le reste est 8
- dans la division euclidienne de 2660 par n , le reste est 9.

Déterminer n .

2) Trouver tous les couples $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ab=939870$ et $\text{PGCD}(a;b)=177$

Théorème de Bézout

Ex 7-20 : Calculer les coefficient de Bézout

1) Montrer que 96 et 67 sont premiers entre eux et déterminer des entiers u et v tels que $96u+67v=1$

2) En déduire un couple d'entiers $(x; y)$ tels que $96x+67y=11$

3) Déterminer le PGCD de -330 et 473

Ex 7-21 : Recherche de u et v



On considère deux nombres a et b premiers entre eux, avec $a > b$
Compléter l'algorithme ci-dessous permettant de trouver u et v

```

1 a=int(input("a="))
2 b=int(input("b="))
3 u=1
4 c=a
5 while (a%b .....):
6     u= .....
7     a=u*c
8 v= .....
9 print ("u=",u,"v=",v)

```

Ex 7-22 : Utiliser le théorème de Bézout

Dans chacun des cas, montrer que pour tout entier n , les entiers a et b sont premiers entre eux.

1) $a=5n+2$ et $b=3n+1$

2) $a=n^4+1$ et $b=n$

3) $a=n+5$ et $b=2n(n+5)+1$

Ex 7-23 : Utiliser le théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers strictement positifs tels que $(a^2+ab-b^2)^2=1$.

Montrer que a et b sont premiers entre eux.

Théorème de Gauss**Ex 7-24 : Résoudre une équation diophantienne de la forme $ax=b$**

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 , l'équation $4(x-2)=5(y-1)$ (E)

Ex 7-25 : Résoudre une équation diophantienne de la forme $ax+by=c$

On considère l'équation $23x-11y=1$ (E₁)

1) Justifier que cette équation admet au moins une solution dans \mathbb{Z}^2 .

2) Déterminer une solution $(x_0; y_0)$ de (E₁).

3) En déduire une solution particulière de $23x-11y=3$ (E)

4) En déduire toutes les solutions de (E)

Ex 7-26: Résoudre une équation diophantienne de la forme $ax+by=c$

On considère les équations $45x+57y=6$ et $15x+19y=1$ (E₁)

1) Justifier que l'équation (E₁) admet au moins une solution dans \mathbb{Z}^2 .

2) Déterminer une solution $(x_0; y_0)$ de (E₁).

3) Montrer que l'équation $45x+57y=6$ est équivalente à l'équation $15x+19y=2$ (E)

4) Déterminer une solution particulière de $15x+19y=2$ (E)

5) Déterminer toutes les solutions de (E)

Ex 7-27: Théorème d'Euclide

Soit a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.

Montrer que si p divise le produit ab , alors p divise a ou p divise b .

Appliquer la dernière propriété du cours :

Si n est divisible par a et par b (premier entre eux), alors n est divisible par le produit ab .

Ex 7-28 :

Soit un entier naturel n . On pose $a = n(n+1)(n+2)$.

Montrer que a est divisible par 2, 3 et 6.

Ex 7-29 :

Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 [9]$

En déduire que $10^n + 8$ est divisible par 9 et par 18.

Problèmes :

Ex 7-30 : Baccalauréat S Amérique du Sud 22 nov 2016 – ex 4

Rep_units : Congruences – Divisibilité - Gauss

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots1}_{p \text{ répétitions du chiffre 1}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul. L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
 - a. Prouver que, pour tout entier naturel j , $10^j \equiv 1 \pmod{3}$.
 - b. En déduire que $N_p \equiv p \pmod{3}$.
 - c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
 - a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \pmod{7}$.
On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

- b. Soit p un entier naturel non nul. Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.
- c. Justifier que, pour tout entier naturel p non nul, $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$.
- d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
- e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.
 - a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots [10]$										

- b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
- c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.
2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20?
3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.



Ex 7-31 : Baccalauréat S Métropole 20 juin 2016 – ex 4

Droites – Coordonnées entières : Divisibilité – PGCD – Bézout



Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b) , on note $\text{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b .

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation $(E) : y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.

Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np .

b. En déduire que q divise n .

3. Réciproquement, on suppose que q divise n , et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

a. On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qr u - mv = 1$.

b. En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}.$$

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

```

1 from math import floor
2
3 M=int(input("M="))
4 N=int(input("N="))
5 P=int(input("P="))
6 Q=int(input("Q="))
7
8 if(N%Q==0):
9     X=0
10    Y1=-P/Q
11    Y2=-P/Q
12    while ((floor(Y1)!=Y1) and (floor(Y2)!=Y2)):
13        X=X+1
14        Y1=M/N*X-P/Q
15        Y2=-M/N*X-P/Q
16    if (floor(Y1)==Y1):
17        print (X,Y1)
18    else:
19        print (X,Y2)
20 else:
21    print ("il n'y a pas de solutions")

```

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q , entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$.

b. Que permet-il d'obtenir?



Ex 7-32 : Baccalauréat S Antilles-Guyane spet 2015 – ex 4**Cryptographie : Congruences – Équation diophantienne - Gauss – Bézout**

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. a. Donner un couple solution $(x_0; y_0)$ de cette équation.
b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.

La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y .

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leq a \leq 25$ et $51a \equiv 1 [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y , alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on?