Définition :

Un entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui même.
Un entier naturel strictement supérieur à 1 et qui n'est pas premier est appelé **nombre composé**.

Propriété :

Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1.

- a possède au moins un diviseur premier.
- si a n'est pas premier, alors au moins un des diviseurs premiers de a est inférieur ou égal à $\sqrt{a}$

1 n'est pas un nombre premier.

Test de primalité :

Pour déterminer si un nombre donné N est premier, on peut chercher s'il est divisible par un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

- Si l'un des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$ divise N, alors N n'est pas premier.
- Si aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$ ne divise N, alors N est premier.

Crible d'Eratosthène :

- On raye le nombre 1 qui n'est pas premier.
Le premier nombre non rayé est 2, il est premier.
-On raye tous les multiples de 2 supérieurs à 2.
Le premier nombre non rayé est 3, il est premier.
- On raye tous les multiples de 3 supérieurs à 3.
Le premier nombre non rayé est 5, il est premier.
- On raye tous les multiples de 5 supérieurs à 5.
Le premier nombre non rayé est 7, il est premier.
- On raye tous les multiples de 7 supérieurs à 7.
Le premier nombre non rayé est 11, il est premier.

On peut s'arrêter car $11 > \sqrt{100}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On a, obtenu alors dans les cases non rayées, les nombres premiers inférieurs à 100 (par exemple).

Infinité des nombres premiers :

Il existe dans ℕ une infinité de nombres premiers.

Démonstration classique :

Supposons que l'ensemble des nombres premiers soit un ensemble fini $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$.

Soit $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k + 1$.

n est strictement supérieur à 1, il admet donc un diviseur premier, c'est-à-dire l'un des nombres p_i.

p_i divise n et p_i divise $p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$, donc p_i divise leur différence, c'est-à-dire 1, ce qui est absurde.

L'ensemble des nombres premiers n'est donc pas un ensemble fini.

Tout diviseur premier de n est l'un des nombres $p_1 , p_2 , ... , p_k$

Décomposition en produit de facteurs premiers :

17787	3
5929	7
847	7
121	11
11	11
1	

On obtient :

$17787 = 3 \times 7^2 \times 11^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

n peut se décomposer sous la forme : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$

où $p_1 , p_2 , ... , p_k$ sont des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ et $\alpha_1 , \alpha_2 , ... , \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.
Cette décomposition est appelée **décomposition de n en produit de facteurs premiers**.

On admet que cette décomposition est unique.

Avec une Tinspire :

factor(450)	$2\cdot 3^2\cdot 5^2$
factor(17787)	$3\cdot 7^2\cdot 11^2$

Ensemble des diviseurs :

L'ensemble des diviseurs naturels de n est l'ensemble des entiers d s'écrivant sous la forme $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$

où $\beta_1 , \beta_2 , ... , \beta_k$ sont des entiers naturels tels que $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, ... , $0 \le \beta_k \le \alpha_k$.

Nombre de diviseurs :

le nombre de diviseurs naturels de n est alors $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times ... \times (\alpha_k + 1)$.

Petit théorème de Fermat :

Si p un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p, càd $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$

Test de primalité :
Ce test n'est pas efficace pour les grandes valeurs de p .

Le petit théorème de Fermat donne une condition nécessaire pour que p soit premier.

S'il existe un entier n compris entre 2 et $p-1$ tel que , n^{p-1} n'est pas congru à 1 modulo p , alors p n'est pas premier. (Ici, il s'agit d'un test de non primalité)

Corollaire du petit théorème de Fermat :

Si p un nombre premier et a un entier naturel, alors $a^p - a$ est divisible par p.