Reconnaître des nombres premiers et des nombres composés

Ex 8-1 : ***Critères de divisibilité***

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

425 , 43576 , 97 , 342153 , 909381 , 454452

Ex 8-2 : ***Décomposition en produit de facteurs premiers***

Décomposer les nombres ci-dessous en produit de facteurs premiers :

45 , 37 , 62 , 85 , 41 , 242 , 93, 500

Ex 8-3 : ***Vrai ou faux (justifier ou donner un contre-exemple)***

1) Tous les nombres premiers sont impairs.

2) Si un nombre p est premier alors $p+2$ n'est pas premier.

3) 1 est un nombre premier.

4) La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

5) 111 111 111 111 est premier.

Ex 8-4 : ***Puissance d'un nombre premier***

Soit p un nombre premier .

1) Le nombre p^2 est-il premier ?

2) Quels sont les diviseurs positifs de p^2 ?

3) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de p^n où $n\in\mathbb{N}$

Ex 8-5 : ***Modulo 4***

1) Montrer que tout entier de la forme $4k$ ou $4k+2$ est composé pour $k\geqslant 1$.

2) En déduire que tout nombre premier impair est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$.

3) La réciproque est-elle vraie ?

Ex 8-6 : ***En factorisant***

Soit n un entier naturel non nul.

1) Le nombre $\mathrm{N}=3n^2+4n$ peut-il être premier ?

2) Pour quelles valeurs de n , le nombre $\mathrm{M}=n^2-10n+16$ est-il premier ?

Ex 8-7 : ***Identité remarquable***

1) Soit a et b deux entiers naturels .
Montrer que si a^2-b^2 est premier, alors a et b sont consécutifs.

2) La réciproque est-elle vraie ?

Ex 8-8 : ***Nombre premier ou pas ?***

Compléter l'algorithme en Python ci-dessous permettant de déterminer si un entier naturel a est premier.

```
from math import *
a=int(input("a="))
m=floor(sqrt(a))
i=2
while ( ............ ............):
    if(........................):
        print(a,"n'est pas un nombre premier")
        i=m+2
    else:
        i=i+1
if (i==............):
    print(a,"est un nombre premier")
```

Utiliser les nombres premiers

Ex 8-9 : ***Fractions irréductibles***

1) Décomposer 54, 60 et 72 en produits de facteurs premiers.

2) Rendre irréductible : $\frac{72}{60}$ et $\frac{18}{54}$

Ex 8-10 :

Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$.

Déterminer toutes les fractions $\frac{a}{b}$ égales à $\frac{168}{315}$ avec $a<168$ et $b<315$

Ex 8-11 :

1) a) Décomposer 48400 et 94864 en produit de facteurs premiers.

b) Justifier que ces deux nombres sont divisibles par 44^2 .

2) Déterminer sans calculatrice :

a) La racine carrée de 48400

b) La racine carrée de 94864

c) La fraction irréductible égale à $\frac{48400}{94864}$

Ex 8-12 : ***Avec des factorielles***

1) a) Montrer que 7 est premier avec 6 !

b) 8 est-il premier avec 7 ! ?

2) Soit p un nombre premier.

a) Montrer que p est premier avec $(p-1)!$

b) Soit un entier k , tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Que peut-on dire de p et $k!$?

Ex 8-13 : $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

Soit m et n deux nombres premiers distincts.

1) mn et $m+n$ sont-ils premiers entre eux ?

2) Écrire $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Ex 8-14 :

1) Donner la décomposition en facteurs premiers de 2020.

2) Déterminer le plus petit entier naturel k non nul tel que k^3 est un multiple de 2020.

Théorème de Gauss et nombres premiers

Ex 8-15 : $ab\equiv 0[p]$ ***avec p premier et*** $na\equiv nb[p]$ ***avec n et p premier entre eux***

1) Soit p un nombre premier .
Montrer que :

$$ab\equiv 0[p] \Leftrightarrow a\equiv 0[p] \text{ ou } b\equiv 0[p]$$

2) En déduire que pour tout entier n premier avec p , on a :

$$na\equiv nb[p] \Leftrightarrow a\equiv b[p]$$

Ex 8-16 : ***Inverse de a modulo p premier***

Soit p un nombre premier . On note $E_p=\{1,2,\dots,p-1\}$
Le but du problème est de montrer que pour tout $a\in E_p$, l'équation $ax\equiv 1[p]$ a une unique solution dans E_p .

1) Montrer qu'il existe un entier x_0 , tel que $ax_0\equiv 1[p]$

2) On note r le reste dans la division euclidienne de x_0 par p .

a) Justifier que r est non nul.

b) Montrer que $ar\equiv 1[p]$.

c) Conclure.

3) Supposons qu'il existe $r' \in E_p$, tel que $ar'\equiv 1[p]$.
Justifier l'unicité de la solution

Ex 8-17 :

1) Pour chaque entier a de 1 à 10, compléter le tableau ci-dessous donnant l'unique entier b de 1 à 10 tel que $ab\equiv 1[11]$.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	1		4				8	7	5	

2) En déduire que 10!+1 est divisible par 11.

Nombre de diviseurs

Ex 8-18 :

Un nombre s'écrit 4×10^n .

Existe-il une valeur de n telle que 4×10^n possède 27 diviseurs.

Ex 8-19 :

1) Soit p un nombre premier et n un entier naturel.
Déterminer le nombre de diviseurs de p^n .

2) Déterminer le produit de ces diviseurs.

Petit théorème de Fermat

Ex 8-20 : ***Démonstration du corollaire du petit théorème de Fermat***

On aimerait démontrer que si p un nombre premier et a un entier naturel, alors $a^p - a$ est divisible par p.

1) Vérifier le résultat pour $a=0$.

2) On suppose maintenant $a\neq 0$.

a) Montrer que $a^{p-1} - 1$ divise $a^p - a$.

b) On suppose que a n'est pas un multiple de p . Montrer que $a^p - a$ est divisible par p.

c) Montrer le même résultat si a est un multiple non nul de p.

Ex 8-21 : $\boldsymbol{n^{11}-n}$ ***divisible par*** **33**

1) Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $n^{11}-n$ est divisible par 11.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $n^3\equiv n[3]$.

b) En déduire que le nombre $n^{11}-n$ est divisible par 3.

3) Déduire des questions 1) et 2) que $n^{11}-n$ est divisible par 33.

Ex 8-22 : $\boldsymbol{n^5-n}$ ***divisible par*** **30**

Soit n un entier naturel non nul..
1) Justifier que n^5-n est divisible par 5.

2) Montrer que $n(n^2-1)(n^2+1)$ est divisible par 3.

3) Pourquoi $n^5 - n$ est-il divisible par 30 ?

Ex 8-23 : $3^{n+p} - 3^{n+1}$ ***divisible par p***

Soit p un nombre premier . Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p

Ex 8-24 : $3^{6n} - 1$ ***divisible par 7***

Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

Ex 8-25 : $n^{13} - n$ ***divisible par 182***

Soit n un entier naturel non nul.
1) Justifier que $n^{13} - n$ est pair.

2) Montrer que 13 et 7 divisent $n^{13} - n$

3) En déduire que $n^{13} - n$ est divisible par 182.

Problèmes :

Ex 8-26 : ***Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 – ex 4***

Nombre de Mersenne : Divisibilité - Congruences – Nombres premiers (test de primalité) - PGCD - Gauss

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\,;\,c) = 1$.
   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :
   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.
2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33} - 1) \div 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882,6

   Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

   a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.**?
   b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.
   c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.
   d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + (2^3)^{10}$.
   e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.
3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.
4. On donne l'algorithme suivant où MOD(N, k) représente le reste de la division euclidienne de N par k.

```
from math import *
n=int(input("n="))
k=2
while (((2**n-1)%k!=0) and (k<=sqrt(2**n-1))):
    k=k+1
print(k)
if k>sqrt(2**n-1):
    print("cas1")
else:
    print("cas2")
```

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?*

Ex 8-27 : *Baccalauréat S Centres étrangers juin 2015 – ex 4*

Triplets pythagoriciens

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
   $120 = 2^3 \times 15$.
   a) Donner la décomposition de l'entier 192.
   b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$. Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.
   c) En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

   On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,
   $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.
3. **a)** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b) En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.

Ex 8-28 : ***Baccalauréat S Centres étrangers juin 2015 – ex 4***

Divisibilité – Gauss – Décomposition en produits de facteurs premiers

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geqslant 1 + n$.

b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.

b. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,
$S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Quels sont les diviseurs de n ?

b. En déduire que $S(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.

5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Soit m un entier naturel.
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

b. Démontrer que $S(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.*