Définitions :

$\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Une matrice de **dimension (ou taille ou format)** $m \times n$ est un tableau rectangulaire formé de m lignes et n colonnes de nombres réels

- **Une matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne.
- **Une matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne.
- **Une matrice carrée** d'ordre n est une matrice $n \times n$.

Le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre placé à la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Une matrice A de dimension $m \times n$ (où $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$) peut s'écrire sous cette forme :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{taille } m \times n}$$

Les nombres a_{ij} (notés parfois $a_{i,j}$ pour éviter les confusions) (où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) s'appellent **les coefficients** de la matrice A .

On peut aussi noter $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$.

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont la même dimension et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

Matrices particulières :

Matrice nulle

La matrice nulle d'ordre n , notée O_n , est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

Dans une matrice carrée d'ordre n , les coefficients a_{11} , a_{22} , …, a_{nn} forment **la diagonale principale** de la matrice. **Une matrice carrée est diagonale** si et seulement si ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice unité

La matrice unité d'ordre n (ou matrice identité d'ordre n), notée I_n , est la matrice carrée d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations :

Si A est d'ordre n , $A + O_n = A$

$(-1) \times A = -A$ est **la matrice opposée** de A.

Différence : $A - B = A + (-1)\,B$

Somme

A+B=B+A (commutativité)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

On ne peut ajouter que des matrices de même taille, et pour cela on ajoute les coefficients situés à la même place.

Multiplication par un réel

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous les coefficients par ce réel.

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 2 + 5 \times 2 = 10$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Multiplication de deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 3 \\ -1 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 & -1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Avec une Ti-nspire

Define $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $b = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *Terminé*

$a \cdot b$ $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Représentation pratique

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

En général, la multiplication de matrices n'est pas commutative :
A×B≠B×A

Le produit AB de deux matrices A et B existe si et seulement si le nombre de colonnes de A estt égal au nombre de lignes de B .

Propriétés :

Soit A , B , C des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Associativité** : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C = ABC$
- **Distributivité** : $A \times (B + C) = AB + AC$ et $(A + B) \times C = AC + BC$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A) \times B = \lambda AB$ et $A \times (\lambda B) = \lambda AB$
- Soit I_n la matrice unité d'ordre n alors $I_n \times A = A$ et $A \times I_n = A$.

Attention : $AB = AC$ n'implique pas que $B = C$ (On ne peut pas simplifier par A)
$AB = O_n$ n'implique pas que $A = O_n$ ou $B = O_n$

Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ *Terminé*

a^2 $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$

a^5 $\begin{bmatrix} 512 & 256 \\ 1024 & 512 \end{bmatrix}$

a^{12} $\begin{bmatrix} 8388608 & 4194304 \\ 16777216 & 8388608 \end{bmatrix}$

Puissances :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, etc ...
Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est le produit de k matrices toutes égales à A .
Par convention, on posera $A^0 = I_n$.

Matrices inversibles :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Attention :

A^{-1} n'existe pas toujours

On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$
La matrice A^{-1} est unique, elle et appelée **matrice inverse** de A .

On admet que : $A\,A^{-1} = I_n \Leftrightarrow A^{-1}A = I_n$.
Dans les exercices il suffira de faire un seul des deux produits.

Un matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,de dimension 2, est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

Define $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *Terminé*

a^{-1} $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

Application aux systèmes linéaires :

Exemple :

Résoudre $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow AX = Y$

Avec la calculatrice on voit que A est inversible et on détermine A^{-1} .

Ainsi : $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Define $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *Terminé*

a^{-1} $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Define $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ *Terminé*

$a^{-1} \cdot y$ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$