SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES – SCHÉMA DE BERNOULLI

1) SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n\in\mathbb{N}^*$) épreuves aléatoires E_1 , E_2 , …, E_n successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes** . Dans ce cas :

- **L'univers des issues possibles** est le produit cartésien $\Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega_n$, où pour tout $k\in\{1;2;\ldots;n\}$, Ω_k est l'univers de l'épreuve E_k .

- **Une issue** de la succession d'épreuves est un n -uplet $(i_1;i_2;\ldots;i_n)$, où i_k est une issue de E_k .

Remarque : Lors de tirages successifs avec remise, les épreuves sont indépendantes.

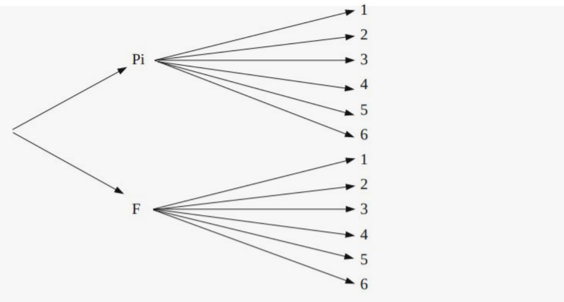
Exemple : On jette successivement une pièce de monnaie non truquée, puis un dé équilibré. Ces deux épreuves sont indépendantes.

On s'intéresse à la probabilité p d'obtenir un face, puis un nombre pair.

En notant $\mathrm{M}=\{Pi,F\}$ et $\mathrm{D}=\{1;2;3;4;5;6\}$, les univers respectifs des deux épreuves, on peut représenter toutes les issues à l'aide du produit cartésien :

$$\mathrm{M}\times\mathrm{D}=\{(Pi;1);(Pi;2);(Pi;3);(Pi;4);(Pi;5);(Pi;6);(F;1);(F;2);(F;3);(F;4);(F;5);(F;6)\}$$

Ou en utilisant un arbre :



Dans les deux cas la description de toutes les issues est intéressante, mais ce travail peut très vite devenir bien laborieux.

Nous pouvons, d'après le principe multiplicatif, dénombrer 12 issues équiprobables, dont 3 favorables, ce qui donne : $p=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Nous pouvons aussi utiliser la propriété ci-dessous :

Propriété : *admise*

Lors de la répétition de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1;i_2;\ldots;i_n)$ est le produit des probabilités de chacune des issues du n -uplet.

Exemple :

On obtient directement la probabilité cherchée : $p=\mathrm{P}(\mathrm{F},2)+\mathrm{P}(\mathrm{F},4)+\mathrm{P}(\mathrm{F},6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ $\qquad p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

2) SCHÉMA DE BERNOULLI

Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités :
l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1-p$.

La loi d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est donnée par le tableau ci dessous :

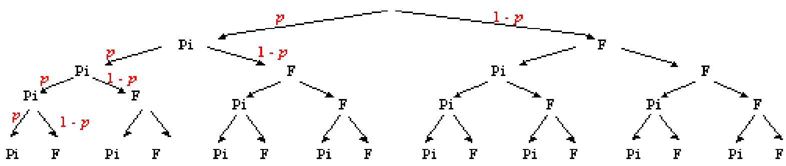
issue	S	$\overline{\mathrm{S}}$
probabilité	p	$1-p$

L'éventualité S correspond au "succès" de l'expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

Exemple : *la preuve qui se généralise à partir de cette exemple est exigible*

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".

Notons $\mathrm{P}(Pi)=p$ et $\mathrm{P}(F)=1-p$ (si la pièce est équilibrée, on a $\mathrm{P}(Pi)=\frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(F)=\frac{1}{2}$).
On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.



L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)$ est $p\times p\times(1-p)\times p=p^3(1-p)$

Il y a $\binom{4}{3}=4$ possibilités d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers . Ainsi la probabilité de l'événement obtenir trois pile est : $\binom{4}{3}p^3(1-p)$

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a $\mathrm{X}(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et on a justifié que $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=4\times p^3(1-p)$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$	$\binom{4}{0}p^0(1-p)^4$	$\binom{4}{1}p^1(1-p)^3$	$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$	$\binom{4}{3}p^3(1-p)$	$\binom{4}{4}p^4(1-p)^0$

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque : On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et p (probabilité du succés)

3) LOI BINOMIALE

On généralise facilement le résultat précédent :

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.
Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :
pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant k\leqslant n$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Définition :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0\,;1\,;\ldots;n\}$
- pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant k\leqslant n$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Cette loi est souvent notée $B(n\,;p)$

Propriété : *admise*

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np$ et pour variance $\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(1-p)$