LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1) RAPPELS

A) VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

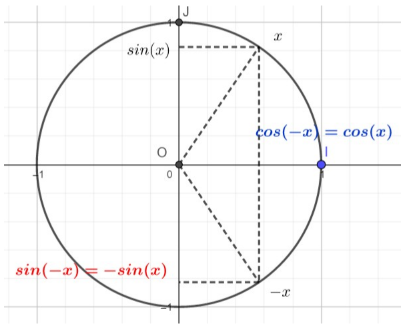
B) QUELQUES PROPRIÉTÉS DU SINUS ET DU COSINUS

Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
- $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

On note $\cos^2 x=(\cos(x))^2$ et $\sin^2 x=(\sin(x))^2$



2) DÉFINITION

Définition :

- La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \cos(x)$
- La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \sin(x)$

3) PARITÉ

On a vu que pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$. On en déduit que :

Propriété :

- La fonction cos est **paire**.
- La fonction sin est **impaire**.

Interprétation graphique dans un repère orthogonal :

- La représentation graphique de la fonction cos admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.
- La représentation graphique de la fonction sin admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

4) PÉRIODICITÉ

On a vu aussi que pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$. On dit que :

Propriété :

Les fonctions cos et sin sont **périodiques** de période 2π

Interprétation graphique dans un repère :

Il suffit de représenter ces courbes sur un intervalle d'amplitude 2π, puis on complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

5) VARIATIONS SUR $[0;\pi]$

On déduit ces deux tableaux du cercle trigonométrique :

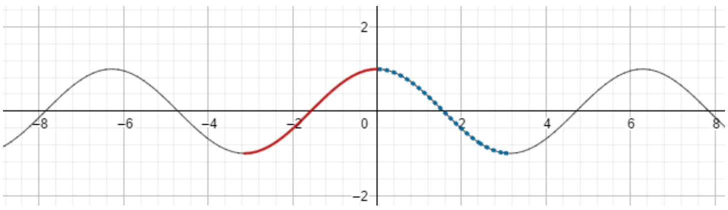
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1 ↘	0

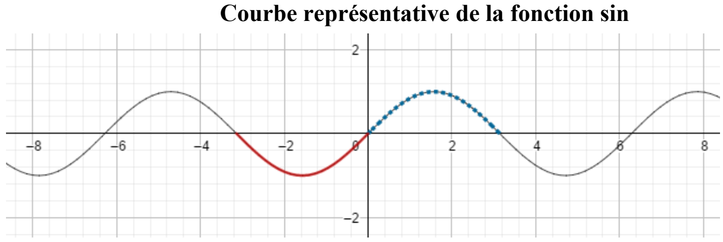
6) COURBES REPRÉSENTATIVES

- En établissant un tableau de valeurs, on trace les courbes représentatives des fonctions sin et cos sur $[0;\pi]$
- La fonction cos est paire . On complète la courbe sur $[-\pi;\pi]$, en utilisant la symétrie d'axe $(\mathrm{O}\,x)$.
- La fonction sin est impaire . On complète la courbe sur $[-\pi;\pi]$, en utilisant la symétrie de centre O.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π . On complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Courbe représentative de la fonction cos



Courbe représentative de la fonction sin



7) DÉRIVÉES

Propriété : ***admise***

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos'(x)=-\sin x$ et $\sin'(x)=\cos x$

Remarque :

On retrouve les variations des fonctions sin et cos sur $[0;\pi]$, en étudiant le signe de la dérivée de chacune de ces fonctions :

- $\forall x\in[0;\pi]$, $\sin x\geq 0$ et donc $\cos'(x)\leqslant 0$ ...

- $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\geqslant 0$ et donc $\sin'(x)\geqslant 0$ …
- $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $\cos x\leqslant 0$ et donc $\sin'(x)\leqslant 0$ …