Fonctions paires, impaires et périodiques

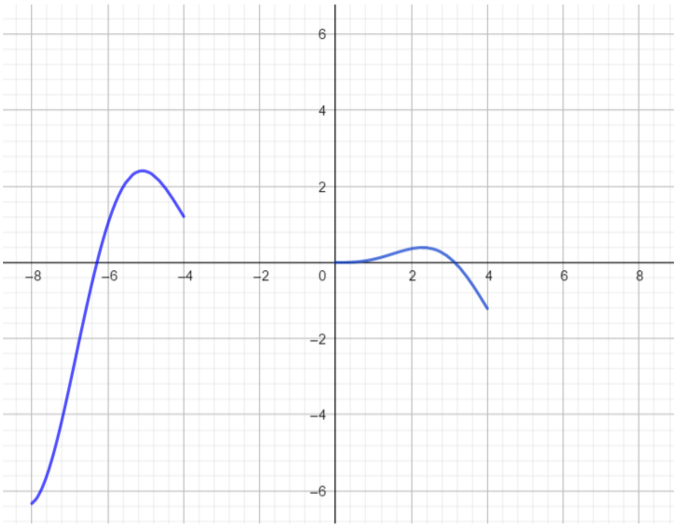
Ex 11-1 : ***Symétrie***

En utilisant une symétrie éventuelle de la représentation graphique, indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.

$f(x)=\sin x$		$f(x)=\|x\|\cos x$	
$f(x)=\cos x$		$f(x)=\cos x \sin x$	
$f(x)=e^{\cos x}$		$f(x)=(\sin(x))^3$	
$f(x)=\sin(\ln(x))$		$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$	
$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{x}$		$f(x)=\cos x+\sin x$	

Ex 11-2 :

La courbe C_f représentant la fonction f définie sur $[-8;8]$ est partiellement représentée ci-contre.
Sachant que f est impaire, compléter le tracé de C_f .



Ex 11-3 : **Étudier la parité**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(2x)+3x^2$
1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

Ex 11-4 : **Étudier la parité**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sin(x)$

1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

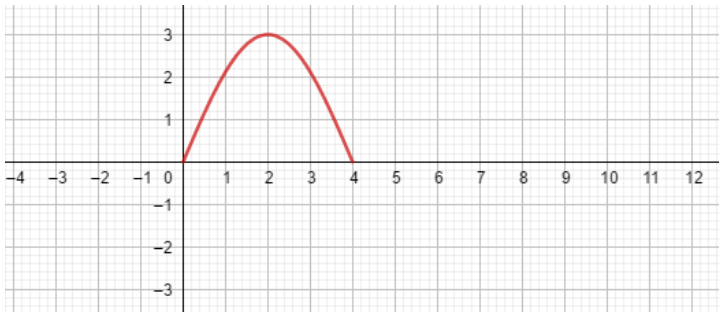
Ex 11-5 : **Étudier la parité et la périodicité – compléter la courbe**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$

1) Vérifier que la fonction f est périodique de période 8.

2) Étudier la parité de f .

3) Quelles transformations permettent de tracer, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4;12]$ à partir du tracé de f sur $[0;4]$.
En déduire le tracé de f sur $[-4;12]$.



<u>Ex 11-6 :</u> Étudier la parité et la périodicité – retrouver la courbe

1) Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, étudier la parité et la périodicité.

a) $f_1 : x \longmapsto \cos(2x)$

b) $f_2 : x \longmapsto 2\sin(x) - 1$

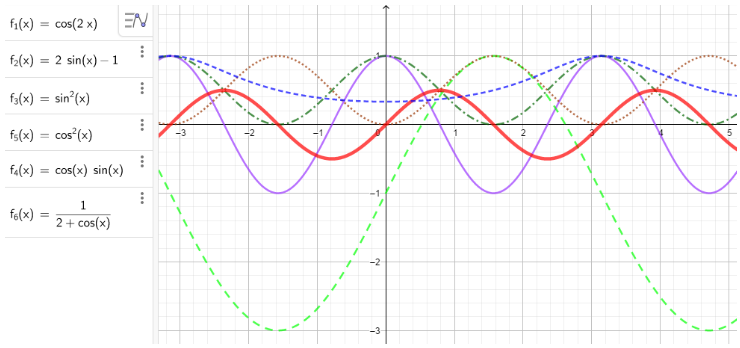
c) $f_3 : x \longmapsto \sin^2 x$

d) $f_4 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$

e) $f_5 : x \longmapsto \cos^2 x$

f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$

2) En utilisant les résultats précédents, associer chaque fonction à sa représentation graphique.

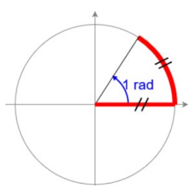


<u>Quelques rappels de trigonométrie</u>

<u>Ex 11-7 :</u> *Valeurs remarquables*

Compléter le tableau ci-dessous :

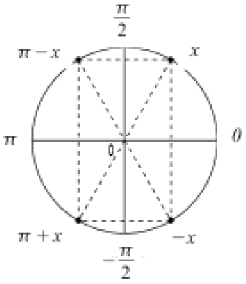
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					

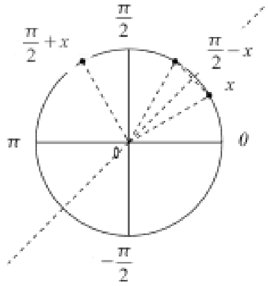


Ex 11-8 : ***formules à connaître et surtout à retrouver***

1) Compléter . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=$

2) En utilisant ces graphiques, compléter :





$\cos(-x)=$ $\sin(-x)=$ $\cos(\pi-x)=$

$\sin(\pi-x)=$ $\cos(\pi+x)=$ $\sin(\pi+x)=$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

Ex 11-9 : ***Formules usuelles (anciennement au programme)***

On admet que $\cos(a-b)=\cos a \cos b+\sin a \sin b$.
En utilisant ce résultat, associer les formules ci-dessous :

Formules d'addition

$\sin(a-b)$		$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b)$		$\sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\cos(a-b)$		$\cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\cos(a+b)$		$\sin a \cos b + \sin b \cos a$

En déduire les formules de duplication :

$\sin(2a)=$

$\cos(2a)=$

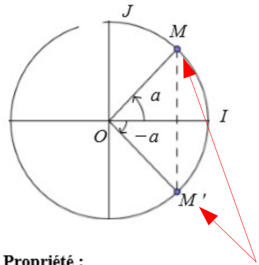
et **les formules de linéarisation :**

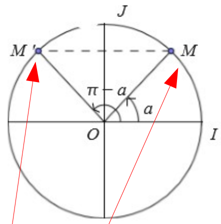
$\cos^2(a)=$

$\sin^2(a)=$

Ex 11-10 : Déterminer les réels correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus

Méthode :





Propriété :

$\boxed{\cos x=\cos a \Leftrightarrow x=a+2k\pi \text{ ou } x=-a+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})}$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M', symétriques par rapport à (OI) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus.
  On retrouve la formule des angles associés :
  $\cos(-x)=\cos(x)$
- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $[0\,;\pi]$

Propriété :

$\boxed{\sin x=\sin a \Leftrightarrow x=a+2k\pi \text{ ou } x=\pi-a+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})}$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M', symétriques par rapport à (OJ) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même sinus.
  On retrouve la formule des angles associés :
  $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$

Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $\sin x=0$

2) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $2\cos x=1$

6) $\cos x+\sin x=7$

7) $\cos x+3=2$

8) $4\sin x=-2$

Ex 11-11 : *Équations*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :
(Vérifier graphiquement avec la calculatrice)

1) $\cos(2x)=\cos(3x-1)$

2) $\sin(3x)=\sin(x+2)$

3) $\cos(3x)=\sin(x)$

Ex 11-12 : Inéquation

Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique, l'ensemble de tous les points associés à α , puis utiliser la représentation pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) $\cos(\alpha)<\frac{1}{2}$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

2) $\cos(\alpha)<\frac{1}{2}$ et $\alpha\in[0;2\pi[$

3) $\sin(\alpha)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

4) $\sin(\alpha)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\in[0;2\pi[$

Dérivées

Ex 11-13 :

Dans chacun des cas déterminer la dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x)=3\cos x-5\sin x+x$

2) $f(x)=3x\cos x$

3) $f(x)=\sin x\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

4) $f(t)=\cos^2 t$

5) $f(t)=\frac{2}{\sin t}$

6) $f(p)=2p\cos p-\cos 3$

7) $f(r)=\frac{2\cos r-4}{\sin r}$

8) $f(t)=(3\cos t-2)^3$

Ex 11-14 : ***Nombres dérivés et limites***

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}$$

Primitives

Ex 11-15 :

Dans chacun des cas déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction donnée.

1) $f(x)=3\cos x-5\sin x+x$

2) $f(x)=\sin x\cos x$

3) $f(x)=12\cos^2 x\sin x$

4) $f(x)=\sin x-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$

6) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{(\sin x+3)^2}$

Ex 11-16 : ***Avec un logiciel de calcul formel***

Xcas fournit le résultat suivant :
Justifier ce résultat.

```
1 integrate(cos(x)^3,x)
```

$$-\frac{\sin(x)^3}{3}+\sin(x)$$

Ex 11-17 : ***Avec des fonctions auxiliaires***

1) Déterminer les dérivées des fonctions g et h définies par $g(x)=x^2\sin x$ et $h(x)=-2x\cos x$

2) Déterminer la dérivée de la fonction $u=g-h$

3) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=x^2\cos x$

Utiliser les variations des fonctions cos et sin

Ex 11-18 : ***Variations de fonctions sans calculer la dérivée***

1) Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x)=5-2\sin x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2) Déterminer les variations de la fonction g définie par $g(x)=2\cos(x)-1$ sur $[-\pi;\pi]$.

Ex 11-19 : ***Encadrements***

1) Dans chacun des cas, encadrer $\cos a$:

a) $\frac{\pi}{3}\leqslant a\leqslant\frac{5\pi}{6}$

b) $-\frac{3\pi}{4} \leqslant a \leqslant 0$

2) Dans chacun des cas, encadrer $\sin a$:

a) $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{3}$

b) $\frac{3\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{5\pi}{4}$

<u>Ex 11-20 :</u> ***Variations de fonctions en calculant la dérivée***

Dans chacun des cas, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle I donné.

1) $f(x) = 2\cos x + 5x - 5$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2 - 4x + 4\sin x$ sur $\mathrm{I} = [0, \pi]$

3) $f(x) = \sin x \cos x$ sur $\mathrm{I} = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$

<u>Ex 11-21 :</u> ***Théorèmes de comparaison*** …

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3\cos x + 1$

1) Montrer que pour tout réel x , $x - 2 \leqslant f(x) \leqslant x + 4$

2) Résoudre les équations $f(x) = x - 2$ et $f(x) = x + 4$

3) Interpréter graphiquement les résultats des questions 1) et 2).

4) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

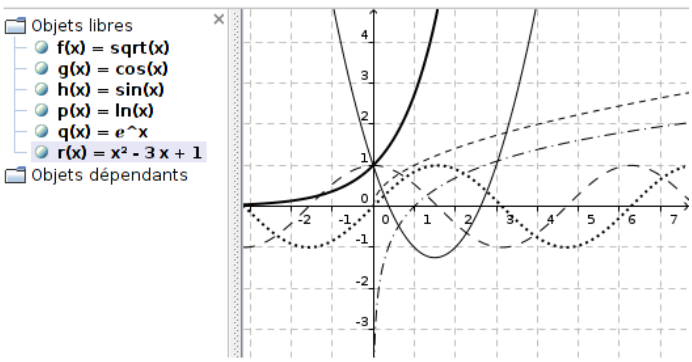
5) La fonction f est-elle bornée ?

6) Étudier les variations de la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Connaître les courbes des fonctions cos et sin

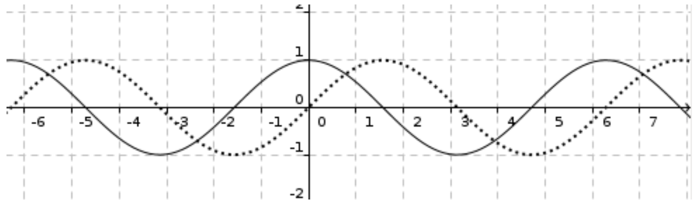
Ex 11-22 :

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 11-23 : ***Résolutions graphiques d'équations***

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :



a) $\cos x = 1$

b) $\sin x = 1$

c) $\cos x = 0$

d) $\sin x = 0$

e) $\cos x = \sin x$

f) $\sin x = x$

Ex 11-24 : ***La courbe de la fonction sin et la droite d'équation y=x***

Soit C la courbe de la fonction sinus et T la tangente à C au point d'abscisse 0.
1) Déterminer une équation de T.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$

3) Calculer $f(0)$ et en déduire la position de T par rapport à C .

Autres fonctions trigonométriques

Ex 11-25 :

1) Encadrer $f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$, et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

2) Dans chaque cas, montrer que f est de signe constant :
a) $f(x)=\cos(3x)+2$

b) $f(x)=5-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$

Ex 11-26 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{4}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

1) Étudier la parité de f .

2) Démontrer que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$.

4) Établir le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

<u>Ex 11-27 :</u> ***La fonction tangente***

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

3) Démontrer que f est périodique de période π .

4) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.

Divers

<u>Ex 11-28 :</u> ***Limites et théorèmes de comparaison***

1) Conjecturer les limites suivantes à partir de l'outil de votre choix.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\sin x+4x-5)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sin x}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos x}{9-x^2}$

2) Justifier les limites précédentes.

<u>Ex 11-29 :</u> ***Avec une suite***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x-\frac{\pi}{5}\cos(2\pi x)$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f(n)$.

1) Prouver que la suite (u_n) est croissante.

2) La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}^+$?