ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PRIMITIVES

1) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Définitions :

- **Une équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f.
  L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées $y\,'$, $y\,''$ …
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y+ay\,'+by\,''+...=0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

Exemple : Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i\,'+\frac{R}{l}i=0$

2) PRIMITIVES

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x dans I, $F\,'(x)=f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Remarques :

- Voilà donc un exemple d'équation différentielle : On cherche une fonction y, telle que $y\,'=f$.
- La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
- De nombreuses fonctions n'admettent pas de primitives.
- On admet ici, mais nous le démontrerons dans le chapitre sur les intégrales que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

B) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x)=F(x)+k$ où $k\in\mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F\,'=f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G\,'=F\,'=f$.
  Donc G est une primitive de f sur I.
- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G\,'=f=F\,'$ d'où $G\,'-F\,'=0$.
  La dérivée de $G-F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G-F$ est constante sur I. Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I, $G(x)-F(x)=k$, d'où le résultat.

Propriété :

Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout couple de réels $(x_0\,;y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0)=y_0$

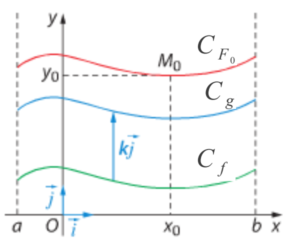
Preuve :

$F_0(x_0)=y_0 \Leftrightarrow F(x_0)+k=y_0 \Leftrightarrow k=y_0-F(x_0)$
Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0)=y_0$ est définie par $F_0(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k\in\mathbb{R})$.

Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$



C) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Par ailleurs, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Fonctions	Primitives ($k \in \mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x)=a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$F(x)=ax+k$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)+k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)+k$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+k$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+k$	$\mathbb{R}$

On retiendra aussi le tableau suivant :
Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a :

Une fonction de la forme	… admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	$e^u + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$2\sqrt{u}+k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$\ln(u)+k$, où $k \in \mathbb{R}$

3) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x , $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k\, e^{-ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

On démontre facilement que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

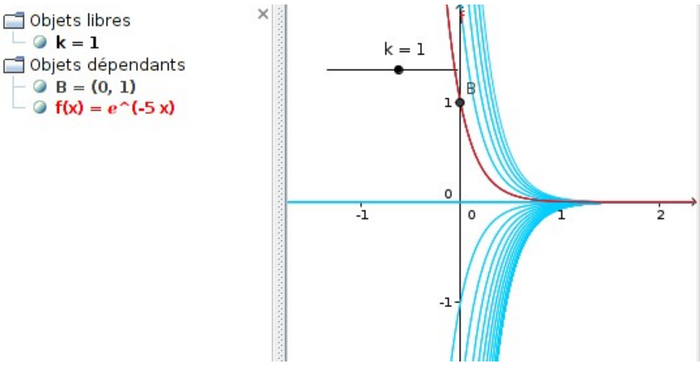
Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k\, e^{-5x}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarques :

L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{\mathrm{d}\, y(x)}{\mathrm{d}\, x} + 5\, y(x) = 0$.
Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k=10$, $k=9$, …



L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=1$.

Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

> Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=0$ (où $a\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5y=0$ telle que $f(0)=5$

Il suffit de résoudre l'équation $k\,\mathrm{e}^{-5\times 0}=5$. On trouve $k=5$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x)=5\,\mathrm{e}^{-5x}$

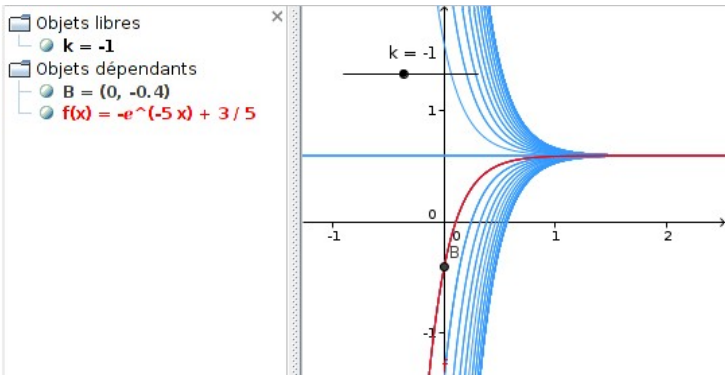
Propriété : *Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant (preuve en exercice)*

> Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-ax}+\dfrac{b}{a}$ où $k\in\mathbb{R}$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$ sont les fonctions de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-5x}+\dfrac{3}{5}$ où $k\in\mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k=10$, $k=9$, …



L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=-0{,}4$.

Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

> Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=b$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5y=3$ telle que $f(0)=1$.

Il suffit de résoudre l'équation $k\,\mathrm{e}^{-5\times 0}+\dfrac{3}{5}=1$. On trouve $k=\dfrac{2}{5}=0{,}4$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x)=0{,}4\,\mathrm{e}^{-5x}+\dfrac{3}{5}$

4) UN AUTRE EXEMPLE : ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE (non exigible)

On considère uniquement les équations linéaires homogènes du second ordre du type $y''+\omega^2 y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x , $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$.

Remarque :
Dans un circuit RC en électricité, l'écriture entre la tension et l'intensité aboutit à une équation du type $U''(t)+\dfrac{1}{RC}U(t)=0$

Propriété : *Un exemple d'équation linéaire du second ordre homogène*

> Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$) sont les fonctions de la forme
>
> $$y(x)=k_1\cos(\omega x)+k_2\sin(\omega x)\ \text{(où } k_1\in\mathbb{R} \text{ et } k_2\in\mathbb{R}\text{)}$$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''+25\,y=0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y''+25\,y=0$ sont les fonctions de la forme $y(x)=k_1\cos(5x)+k_2\sin(5x)$ (où $k_1\in\mathbb{R}$ et $k_2\in\mathbb{R}$)

On a admis que ces fonctions sont les seules solutions possibles . Il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions.
Pour tout réel x, on a :

$f(x)=k_1\cos(5x)+k_2\sin(5x)$

$f'(x)=-5k_1\sin(5x)+5k_2\cos(5x)$

$f''(x)=-25k_1\cos(5x)-25k_2\sin(5x)$

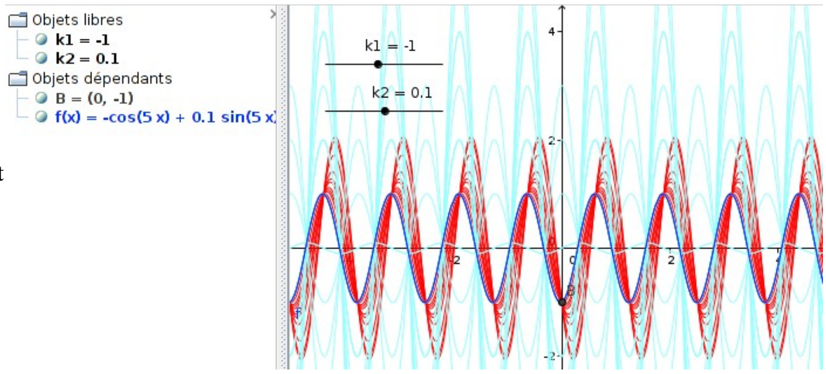
$f''(x)+25f(x)=-25k_1\cos(5x)-25k_2\sin(5x)+25(k_1\cos(5x)+k_2\sin(5x))=0$

Remarque :
L'équation différentielle $y''+25\,y=0$ peut aussi se noter $f''(x)+25\,f(x)=0$ ou encore $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+25\,y(x)=0$.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k_1 et k_2.

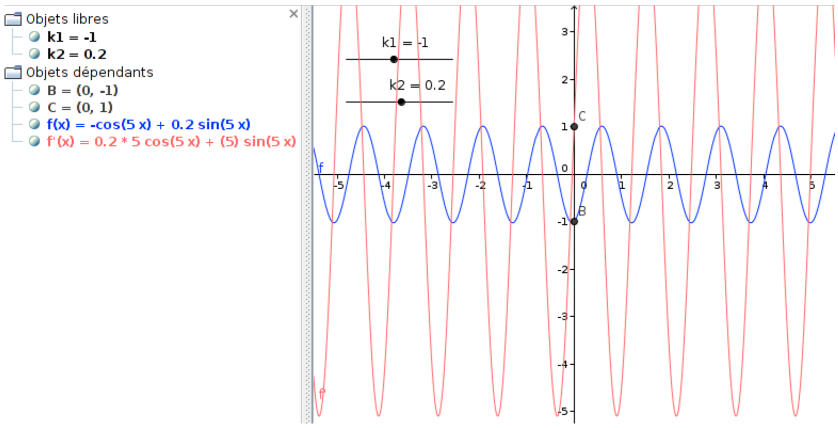
L'équation de l'exemple admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k_1 et k_2.

Contrairement à une équation linéaire du premier ordre, on peut observer qu'il y a une infinité de courbes telles que $f(0)=-1$.



Avec GeoGebra, on a représenté les fonctions f et f'.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule fonction telle que $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$.



Propriété : *Solution vérifiant des conditions initiales données*

> Pour tous réels x_0, y_0 et z_0, l'équation $y''+\omega^2 y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$ et $f'(x_0)=z_0$

Remarque :
Dans les problèmes liés à une expérience physique, les conditions imposées par l'expérience sont généralement les conditions à l'instant $t=0$ (Position et vitesse à l'instant $t=0$ par exemple)

Autre écriture des solutions :

Les représentations précédentes sont périodiques et ont une forme de sinusoïde . On peut donc imaginer une autre écriture des solutions.

En effet, pour faciliter l'exploitation d'une solution d'une équation différentielle du type $y''+\omega^2 y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$), on est souvent amené à l'écrire sous la forme $x\longmapsto A\sin(\omega x+\varphi)$.

La transformation qui permet de passer d'une écriture à l'autre est admise.
Cette deuxième écriture est souvent privilégiée dans les problèmes de physique . (φ est appelé le déphasage)