Primitives

Ex 12-1 : $y'=f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'=2$

b) $y'=e^x-1$

c) $y'=x^2$

2) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$, des fonctions f , g et h définies par :

a) $f(x)=2$

b) $g(x)=e^x-1$

c) $h(x)=x^2$

Ex 12-2 : ***Déterminer les primitives***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=-\frac{5}{x^3}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

3) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{3}e^x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 12-3 : ***Déterminer une primitive vérifiant une condition***

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x)=3e^x+x^2+x^4$ sur $I=\mathbb{R}$ et telle que $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+e^x$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=0$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x+1$ sur sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=4$

Ex 12-4 : ***Primitives de la fonction racine carrée***

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 12-5 : ***Primitives de fonctions composées***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=x^3(x^4+1)^8$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

3) $f(x)=5e^{2x-3}$ sur $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

5) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\left(x^5-\frac{1}{6}\right)(x^6-x)^4$ sur $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^6}$ sur $I=]\sqrt{2};+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 12-6 : *Un cas compliqué*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 12-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'-3y=0$

2) $y'+2y=0$

3) $2y'-y=0$

Ex 12-8 : *Avec une condition initiale*

Soit l'équation différentielle (E_0) : $2y'+y=0$

1) Résoudre l'équation (E_0) .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0)=1$.

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 12-9 : *Découverte d'une propriété fondamentale*

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}): y'-2y=5$

1) Résoudre l'équation $(\mathrm{E}_0): y'-2y=0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(\mathrm{E}): y'-2y=5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{E}_0): y'-2y=0$, alors y_0+y_p est solution (E).

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y-y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :
Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E).
Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donner dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Ex 12-10 : ***Appliquer la formule du cours***

Soit l'équation différentielle $(F) : 3y' - 2y = \ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F).

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0) = 1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Pour les ex11 et 12 on appliquera la propriété déjà montrée sur un exemple :
Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 12-11 :

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y = x^2 - x - 1$
1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 1$

Ex 12-12 : ***Avec un peu de trigonométrie***

On considère l'équation différentielle :
$(E) : y' - 3y = \sin x$
1) Résoudre l'équation sans second membre associé : $(E_0) : y' - 3y = 0$

2) Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie par : $p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E)

3) En déduire les solutions de (E).

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 12-13 : ***Baccalauréat S – Extrait de Métropole juin 2003***

Équations différentielles

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.

2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;+\infty[$ la relation :

$$(\mathrm{E}) \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

b. Résoudre (E′).

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\mathrm{M}}{1 + Ce^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \mathrm{M}$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\mathrm{M}}{2}$.