

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PRIMITIVES

1) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Définitions :

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f . L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y' , y'' ...
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y+ay+by''+\dots=0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

Exemple : Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{L}i = 0$

2) PRIMITIVES

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Remarques :

- Voilà donc un exemple d'équation différentielle : On cherche une fonction y , telle que $y' = f$.
- La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
- De nombreuses fonctions n'admettent pas de primitives.
- On admet ici, mais nous le démontrerons dans le chapitre sur les intégrales que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

B) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.
Donc G est une primitive de f sur I .
- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.
La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I . Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété :

Soit f une fonction admettant des primitives sur I .
Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

Preuve :

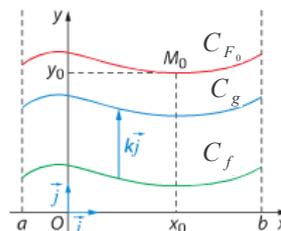
$$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$$

Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0; y_0)$



C.) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

Par ailleurs, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Fonctions	Primitives ($k \in \mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$F(x) = ax + k$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$	\mathbb{R}_+^*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	\mathbb{R}_+^*
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	\mathbb{R}
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	\mathbb{R}

On retiendra aussi le tableau suivant :

Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I , on a :

Une fonction de la forme	... admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	$e^u + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$\ln(u) + k$, où $k \in \mathbb{R}$

3.) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction y , c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} , telles que pour tout réel x , $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur \mathbb{R} . On ne le répétera donc pas à chaque fois.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

On démontre facilement que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-5x}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarques :

L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{d}{dx} y(x) + 5y(x) = 0$.

Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

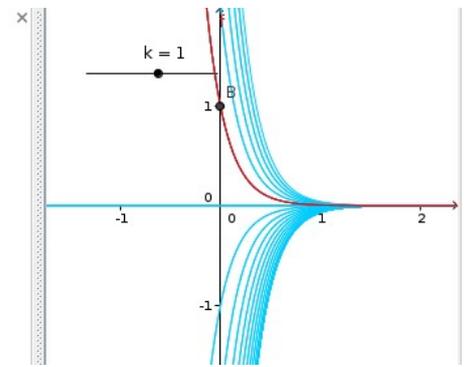
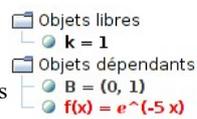
Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k = 10, k = 9, \dots$

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k .

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = 1$.

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale donnée

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$



Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 5$

Il suffit de résoudre l'équation $k e^{-5 \times 0} = 5$. On trouve $k = 5$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x) = 5 e^{-5x}$

Propriété : Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant (preuve en exercice)

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-5x} + \frac{3}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$

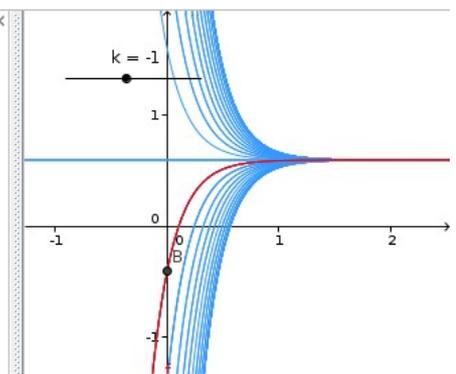
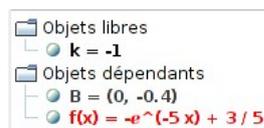
Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k = 10, k = 9, \dots$

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = -0,4$.

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale donnée

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$



Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ telle que $f(0) = 1$.

Il suffit de résoudre l'équation $k e^{-5 \times 0} + \frac{3}{5} = 1$. On trouve $k = \frac{2}{5} = 0,4$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x) = 0,4 e^{-5x} + \frac{3}{5}$

4) UN AUTRE EXEMPLE : ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE (non exigible)

On considère uniquement les équations linéaires homogènes du second ordre du type $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ d'inconnue la fonction y , c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} , telles que pour tout réel x , $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

Remarque :

Dans un circuit RC en électricité, l'écriture entre la tension et l'intensité aboutit à une équation du type $U''(t) + \frac{1}{RC} U(t) = 0$

Propriété : Un exemple d'équation linéaire du second ordre homogène

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x) \text{ (où } k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } k_2 \in \mathbb{R})$$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$ (où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$)

On a admis que ces fonctions sont les seules solutions possibles. Il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions. Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$$

$$f'(x) = -5k_1 \sin(5x) + 5k_2 \cos(5x)$$

$$f''(x) = -25k_1 \cos(5x) - 25k_2 \sin(5x)$$

$$f''(x) + 25f(x) = -25k_1 \cos(5x) - 25k_2 \sin(5x) + 25(k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)) = 0$$

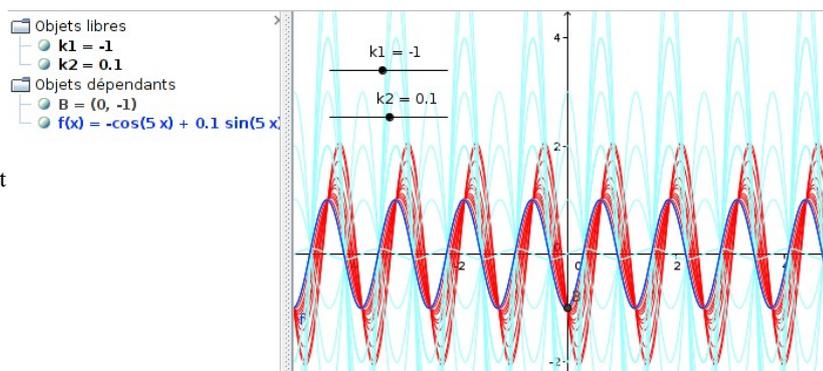
Remarque :

L'équation différentielle $y'' + 25y = 0$ peut aussi se noter $f''(x) + 25f(x) = 0$ ou encore $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 25y(x) = 0$.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k_1 et k_2 .

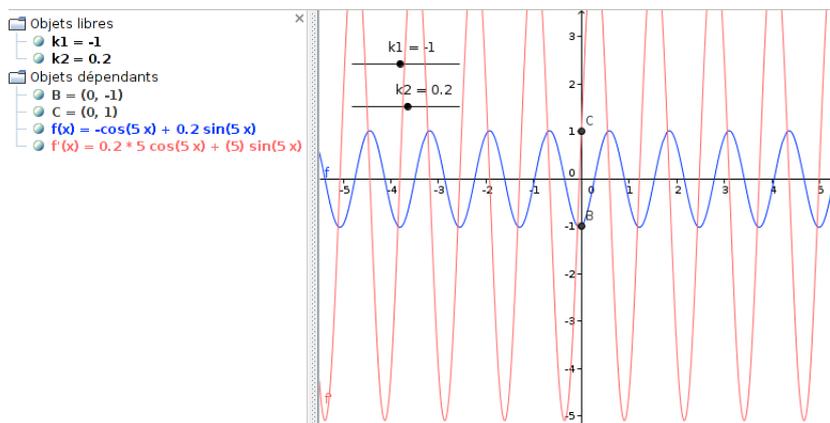
L'équation de l'exemple admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k_1 et k_2 .

Contrairement à une équation linéaire du premier ordre, on peut observer qu'il y a une infinité de courbes telles que $f(0) = -1$.



Avec GeoGebra, on a représenté les fonctions f et f' .

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule fonction telle que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.



Propriété : Solution vérifiant des conditions initiales données

Pour tous réels x_0 , y_0 et z_0 , l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$

Remarque :

Dans les problèmes liés à une expérience physique, les conditions imposées par l'expérience sont généralement les conditions à l'instant $t = 0$ (Position et vitesse à l'instant $t = 0$ par exemple)

Autre écriture des solutions :

Les représentations précédentes sont périodiques et ont une forme de sinusoïde. On peut donc imaginer une autre écriture des solutions.

En effet, pour faciliter l'exploitation d'une solution d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$), on est souvent amené à l'écrire sous la forme $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$.

La transformation qui permet de passer d'une écriture à l'autre est admise.

Cette deuxième écriture est souvent privilégiée dans les problèmes de physique. (φ est appelé le déphasage)