

Chapitre 13 - INTÉGRALES

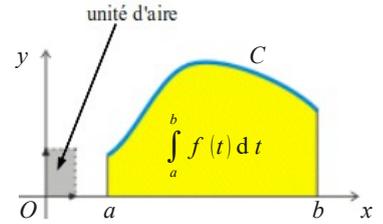
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t) dt$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(t)dt$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".

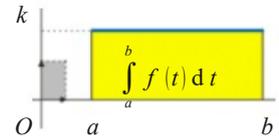
On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .
Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm^2 .

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a; b]$ le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemples :

- Si $a=b$, alors $\int_a^a f(t) dt = 0$.
- Pour $k > 0$, $\int_a^b k dt = k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.

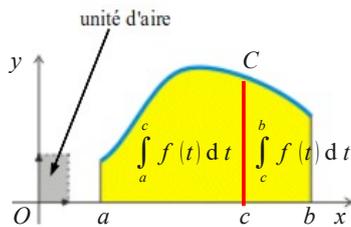


B) RELATION DE CHASLES

Propriété : admise

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés : admise

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. On a :

- $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
- $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Preuve : exigible

On a vu que $x \mapsto H(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Soit F une primitive de f sur I , on a donc : $F(x) = H(x) + k = \int_a^x f(t) dt + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donc $F(a) =$ _____ et $F(b) =$ _____

Ainsi $F(b) - F(a) =$ _____

Remarque : On note aussi $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Preuve : idée de preuve (Cas d'un intervalle fermé en admettant que f a un minimum)

On suppose que f est définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$ et que f admet un minimum m sur $[a ; b]$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a ; b]$.

Elle admet donc une primitive G sur $[a ; b]$.

On définit alors la fonction F sur $[a ; b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$

F est dérivable sur $[a ; b]$ et, pour tout $x \in [a ; b] : F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a ; b]$.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE

Théorème-définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous réels a et b de I , la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t) dt$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b , on a : $\int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt =$ _____

On en déduit que :

4) INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Preuve : exigible

On sait que u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ de dérivées u' et v' continues sur $[a; b]$. On en déduit que $u'v + uv'$ est continue sur $[a; b]$. On sait aussi que $(uv)' = u'v + uv'$.

On peut donc dire que uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a; b]$. On a alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) + u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$$

⇔

⇔

Remarque :

On applique cette formule lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de deux fonctions à condition que $\int_a^b u'(x) v(x) dx$ soit plus facile

à calculer que $\int_a^b u(x) v'(x) dx$, ce qui est le cas par exemple dans les situations suivantes :

- une fonction polynôme u et une fonction sinus ou cosinus
- une fonction polynôme u et une fonction logarithme
- une fonction exponentielle u et une fonction sinus ou cosinus
- une fonction sinus ou cosinus u et une fonction exponentielle

Il faut parfois répéter plusieurs fois cette méthode.

Exemple :

Calculer $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$

Ce qui donne

u et v sont bien dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les dérivées u' et v' sont bien continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx =$$