

Intégrale d'une fonction continue et positive
Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 13-1 : Vrai ou faux

- 1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.
- 2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.
- 3) Le résultat de $\int_a^b f(x)dx$ dépend de x .
- 4) Si f est une fonction positive et si $a < b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ peut être strictement négative.

Ex 13-2 :

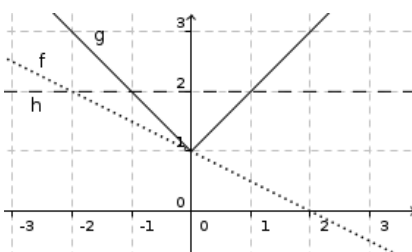
Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a; b]$, puis calculer son intégrale sur $[a; b]$.

1) $f(x) = 3x - 1$ sur $[2; 5]$

2) $f(x) = |x - 3|$ sur $[1; 4]$

Ex 13-3 : À partir d'une représentation graphique

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1; 1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



Ex 13-4 : Avec une fonction affine par morceaux

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2; 4]$.

2) Déterminer $\int_{-2}^4 f(x)dx$

Ex 13-5 : Avec un demi-cercle

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.

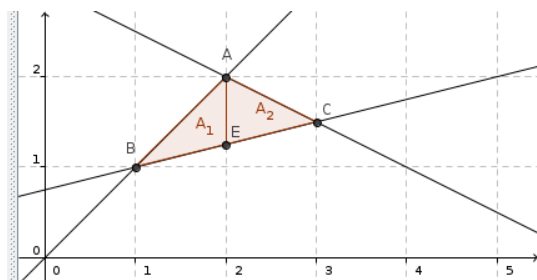
2) Montrer que C_f est un demi-cercle.

3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

3) Déterminer $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Ex 13-6 :

- Objets libres
- $D = (2, 0)$
- $f(x) = x$
- $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x$
- $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
- Objets dépendants

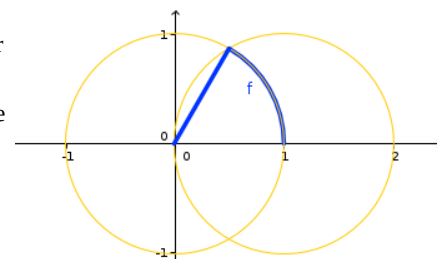


1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2) En calculant $\int_1^2 f(x) dx$ et $\int_1^2 h(x) dx$ déterminer l'aire A_1 .

Ex 13-7 :

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)



Déterminer $\int_0^1 f(x) dx$

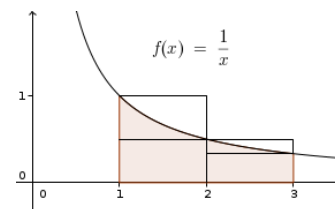
Ex 13-8 : Algorithme : sommes de Riemann

On considère l'algorithme ci-dessous :



<pre> 1 a=float(input("a=")) 2 b=float(input("b=")) 3 p=float(input("p=")) 4 s1=1 5 s2=0 6 n=1 7 while (s1-s2>p): 8 n=n+1 9 s1=0 10 s2=0 11 for i in range(0,n): 12 s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n) 13 s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n) 14 print(s1) 15 print(s2) </pre>	<pre> lire,a,b,p s1 ← 1 s2 ← 0 n ← 0 tant que (s1-s2)>p faire n ← n+1 s1 ← 0 s2 ← 0 Pour i allant de 0 à n-1 s1 ← s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n) s2 ← s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n) Fin pour Fin tant que Afficher s1,s2 </pre>
--	---

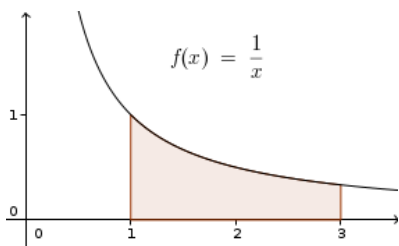
1) On choisit $p=0,1$.
Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?



À quoi correspond cette aire ?

La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme. Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s_1 et s_2 .

2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s_1 et s_2 au début de l'algorithme

4) Faire tourner le programme et déterminer ce qu'il renvoie pour $p=0,01$

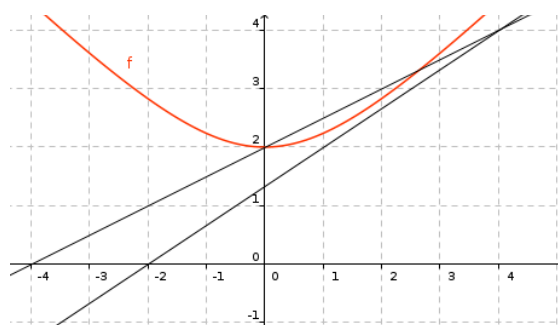
Propriétés de l'intégrale

Ex 13-9 : Encadrer une intégrale

1) Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $1 \leq e^{x^2} \leq e$, puis en déduire un encadrement de $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$

2) Démontrer que pour tout $x \in [0;8]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 3$, puis en déduire un encadrement de $J = \int_0^8 \sqrt{1+x} dx$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}$.



En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 f(x) dx$

Ex 13-10 : Encadrer une intégrale - Relation de Chasles

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = e^{x^3}$.

On pose $I = \int_{-1}^1 e^{x^3} dx$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$. En déduire un encadrement de I .

3) Démontrer que :

$$- \forall x \in [-1; 0] , f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$$

$$- \forall x \in [0; 1] , f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

En déduire un nouvel encadrement de I.

On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 ... et obtenir des encadrements de plus en plus fins de I ... l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'Ex 13-8 !

Ex 13-11 : Valeur moyenne

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = e^{-x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n; n+1]$.

1) Donner l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n; n+1], e^{-(n+1)} \leq e^{-x} \leq e^{-n}$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive

Ex 13-12 :

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$$

$$2) \int_{-1}^1 x^4(x^5-1)^2 dx$$

$$3) \int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}} du$$

$$4) \int_0^1 e^x(e^x+9)^3 dx$$

Ex 13-13 : Décomposition en éléments simples

Soit f la fonction définie sur $I=[0; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$

1) Démontrer que f est continue et positive sur $I=[0; 5]$.

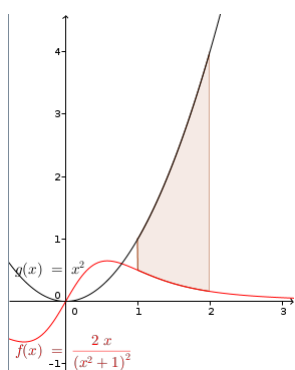
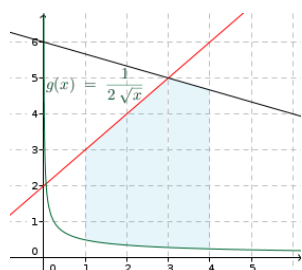
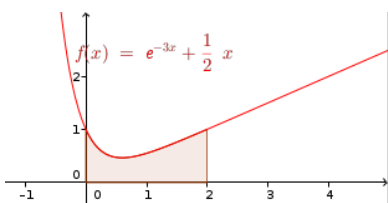
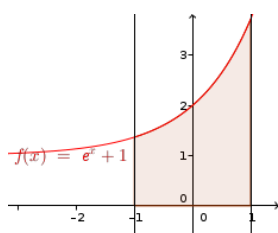
2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

3) En déduire $\int_0^5 f(x)dx$

Ex 13-14 : Calculs d'aires

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

Remarque : $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$



Ex 13-15 : Interprétation de Xcas

```
g(t):=3*exp(-3*t);
f(x):=integrate(g(t),t,0,x);
f(x);
limite(f(x),x,+infinity)
```

$$(t \rightarrow 3 \cdot \exp(-3 \cdot t), x \rightarrow \int_0^x g(t) dt, -\exp(-3 \cdot x) + 1, 1)$$

Interpréter chacune des lignes ci-dessus.

2) Interpréter ce résultat graphiquement.

Ex 13-16 : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(t) = e^{-t^2}$.

Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) La fonction F est-elle dérivable sur \mathbb{R}^+ .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$. (On fera apparaître un taux d'accroissement)

Ex 13-17 : Une primitive de la fonction ln

Soit F et G deux fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \ln(t)dt$ et $G(x) = x \ln(x) - x$.

1) Démontrer que F et G sont dérivables sur $[1; +\infty[$ et calculer leur dérivée.

2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $F(x) = G(x) + k$.

3) Calculer k .

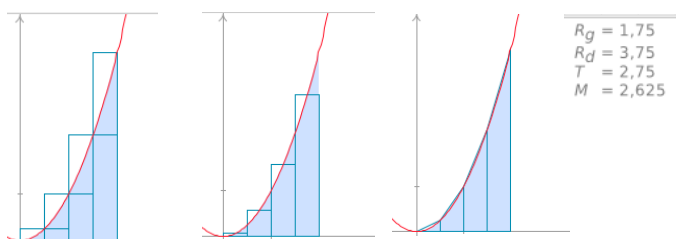
4) Calculer $\int_1^e \ln(t) dt$



Ex 13-18 : Différentes méthodes d'approximation

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\int_1^2 x^2 dx$.

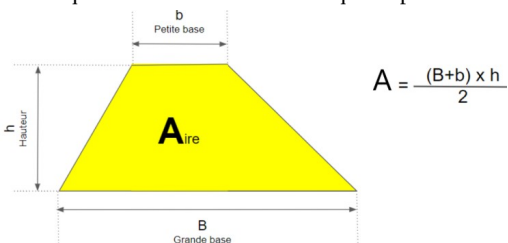
1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente.

2)

Rappel :



Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il applique la méthode des trapèzes (avec 10 trapèzes) à $\int_1^2 x^2 dx$.

```

1 def f(x):
2     return ( ..... )
3
4 def MethodeTrapeze(f, a, b, N):
5     pas = .....
6     x = .....
7     Aire = .....
8     for i in range(N):
9         AireTrapeze = .....
10        Aire = .....
11        x = .....
12    return Aire
13
14 print(MethodeTrapeze(f, 1,2,10))
    
```

3) Calculer $\int_1^2 x^2 dx$ et comparer avec l'approximation obtenue.

4) a) Tester le programme [MethodeTrapeze.py](#) (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode des trapèzes dessinée avec 10 trapèzes.

b) Modifier le programme pour visualiser la méthode des trapèzes avec 12 trapèzes pour calculer $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1 dx$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 13-19 : Vrai ou faux

- 1) Si f est une fonction négative et si $a < b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.
- 2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.
- 3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.
- 4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a; b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ est fautive.

Ex 13-20 : Propriétés de l'intégrale

Soit a et b des nombres réels tels que $a < b$, f et g des fonctions continues sur $[a; b]$.

On pose $I = \int_a^b f(x) dx$ et $J = \int_a^b g(x) dx$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

- 1) $\int_b^a f(x) dx$
- 2) $\int_a^b f(x) - g(x) dx$
- 3) $c \in [a; b]$, $\int_b^c g(x) dx - \int_a^c g(x) dx$
- 4) $\int_a^b -3x + \frac{2}{3}g(x) dx$

Ex 13-21 : Calculer une intégrale avec une primitive

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^2 \frac{e^x - 1}{(e^x - x)^2} dx$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \ln(x) dx$

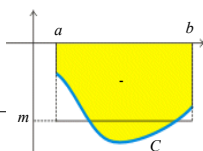
3) $\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

Ex 13-22 : Calculs d'aires

Propriété :

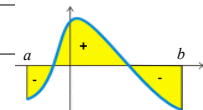
Si f est **une fonction continue et négative** sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On dit parfois que $\int_a^b f(t) dt$ est l'**aire algébrique** du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a; b]$, et négative si f est négative sur $[a; b]$

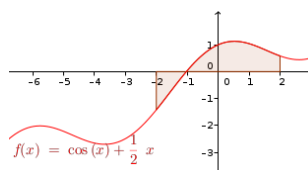
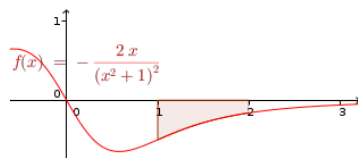


Propriété :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

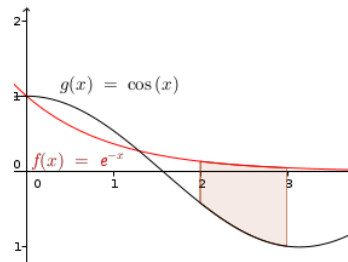
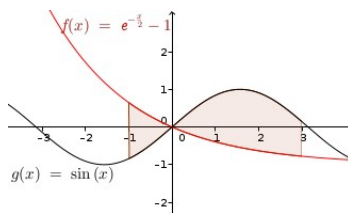


Remarques :

- Comme on le verra plus tard $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$

- En tradant du vecteur $k \vec{j}$ (avec k suffisamment grand), les deux courbes, tout devient positif ... En utilisant

$\int_a^b f(x) + k dx - \int_a^b g(x) + k dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$, tout devient simple !



Ex 13-23 : Décomposition en éléments simples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

1) Déterminer quatre réels a , b , c et d tels que, pour tout $x \neq -2$,

$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+2}$

2) En déduire $\int_{-1}^1 f(x) dx$

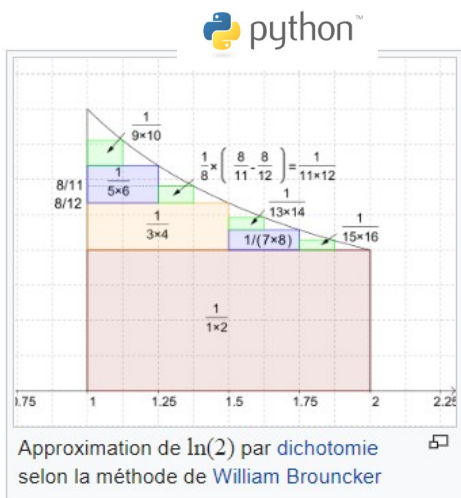
Ex 13-24 : Un encadrement de de ln2

1) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

2) a) En déduire que $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) Déterminer un encadrement du réel $\ln(2)$

Ex 13-25 : Une approximation de ln(2) - Algorithme de Brouncker



En 1668, [William Brouncker](#) publie le développement en série de $\ln(2)$, résultat qu'il a établi dès 1657 en découpant l'aire sous l'hyperbole en rectangles venant boucher les trous par [dichotomie](#) :

$$\ln(2) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{(2k+1) \times (2k+2)} + \dots$$

En utilisant cette formule, compléter le programme ci-dessous écrit en Python afin d'obtenir une approximation de $\ln(2)$ pour $k=100$:

```

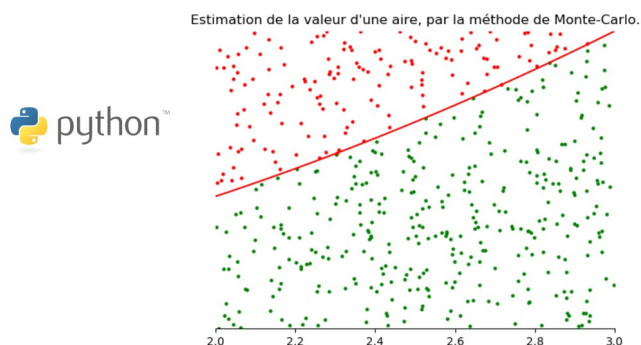
1 def Brouncker ( N ):
2     Ln_2 = .....
3     .....
4     Ln_2 = .....
5     return Ln_2
6
7 print(Brouncker(100))
    
```

Ex 13-26 : Une approximation de ln(2) - Méthode Monte-Carlo

Exemple pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2 dx$
 Cette méthode repose sur la loi des grands nombres.

- On définit un rectangle R de cotés $[2 ; 3] \times [0 ; y_{max}]$ tel que $0 \leq x^2 \leq y_{max}$ pour tout $2 \leq x \leq 3$

- On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.



1) Déterminer y_{max}

2) Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de la fonction carrée ?

3) Que nous dit la loi des Grands Nombres ?

4) Le programme ci-dessous écrit en Python permet d'appliquer la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2 dx$ avec $n=1000$.

```

1 import random
2
3 def f(x):
4     return (x**2)
5
6 def MethodeMonteCarlo(f, a, b, yMax, n):
7     compteur = 0
8     for i in range(n):
9         x = random.uniform(a,b)
10        y = random.uniform(0,yMax)
11        if (f(x) >= y):
12            compteur = compteur + 1
13
14        Aire = yMax * (b - a) * compteur / n
15        return Aire
16 print(MethodeMonteCarlo(f, 2,3,9,1000))
    
```


a) Testez le programme [MethodeMonteCarlo.py](#) (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Monte-Carlo et vérifier qu'on obtient une bonne approximation de $\frac{19}{3}$.

b) Modifier quelques lignes de ce programme pour obtenir une approximation de $\ln(2)$.

Ex 13-27 : Étude d'une suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

1) a) Calculer I_1 .

b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n>1}$ est croissante et majorée par 1.

Que peut-on en déduire ?

2) a) Établir que pour tout $n > 0$, $I_n = 1 - J_n$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$.

c) En déduire que pour tout $n > 0$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n > 0$, la fonction F_n , définie par $F_n(x) = \frac{x}{n} \ln(1+x^n)$ est dérivable sur $[0; 1]$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire que pour tout $n > 0$, $J_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} K_n$.

c) Étudier les variations et le signe de la fonction F , définie par $F(x) = \ln(1+x) - x$ sur $[0; 1]$.

En déduire que pour tout $n > 0$, $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(I_n - 1) + \ln(2))$

Ex 13-28 : La constante d'Euler

Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n)$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer, en encadrant la fonction inverse sur l'intervalle $[k; k+1]$, que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

3) Établir, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right)$$

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

Sa limite que l'on ne cherchera pas à déterminer, est appelée la constante d'Euler.

Intégration par parties**Ex 13-29 : Avec une intégration par parties**

Déterminer les intégrales ci-dessous en effectuant une intégration par parties :

1) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

2) $\int_{-1}^1 x e^x \, dx$

3) $\int_2^4 x \ln x \, dx$

4) $\int_1^e \ln x \, dx$

5) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$

Ex 13-30 : Avec deux intégrations par parties

Déterminer les intégrales ci-dessous en effectuant deux intégrations par parties successives :

1) $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x) \, dx$

$$2) \int_{-1}^1 x^2 e^x dx$$

Ex 13-31 : Avec deux intégrations par parties et en résolvant une équation

1) Déterminer $\int_0^\pi \cos x e^x dx$ en effectuant deux intégrations par parties successives.

2) a) En posant $u(x)=\sin x$ et $v'(x)=\sin(x)$, expliquer le problème de cette méthode pour le calcul de $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$.

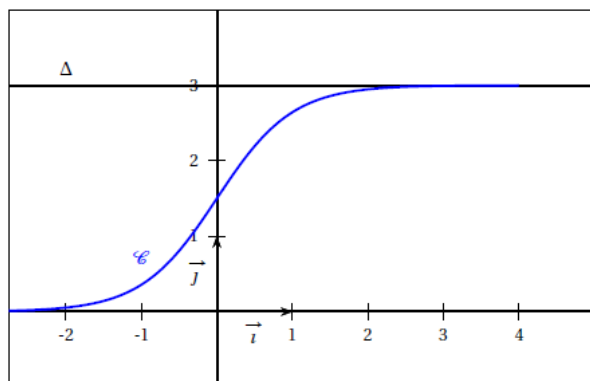
b) Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser la formule de trigonométrie : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Essayez ...

EXERCICES DE TYPE BAC*(Les intégrales ne sont plus au programme du bac)***Ex 13-32 :** *Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 - Ex 13-1*

Avec la fonction exp – théorème des bijections – intégrales – domaines – aires

Partie ASoit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.

- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} . Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie BSoit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

- Justifier que la fonction h est positive sur \mathbb{R} .
- On désigne par H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbb{R} .
- Soit a un réel strictement positif.
 - Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.
 - Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.
 - On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$$
 Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .

Ex 13-33 : Baccalauréat S Métropole juin 2006 - Ex 13-2

Avec la fonction exp – suites – intégrales – intégration par parties pour mettre en place une relation – domaines – aires

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour \mathcal{C} peut-on en tirer?
 - Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer sa fonction dérivée f' .
 - Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe \mathcal{C} .
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

- Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
 - Calculer I_1 , puis I_2 .
 - Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.
3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

- b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Ex 13-34 : Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015 - Ex 13-1

Avec la fonction ln – domaines – aires – théorème des bijections

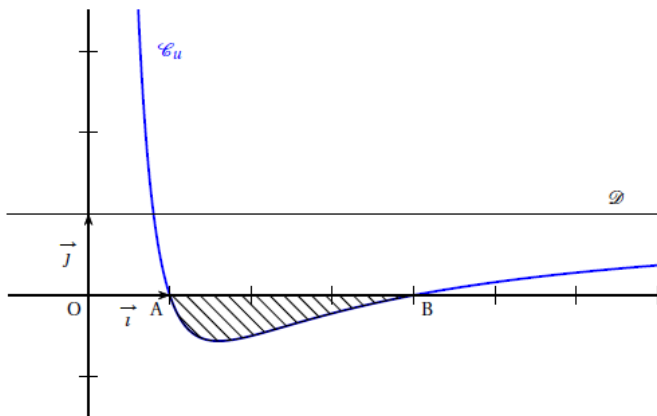
Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par \mathcal{C}_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe \mathcal{C}_u et la droite \mathcal{D} d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe \mathcal{C}_u passe par les points $A(1; 0)$ et $B(4; 0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite \mathcal{D} sont asymptotes à la courbe \mathcal{C}_u .

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a .
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la partie A.
2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note \mathcal{A}_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Ex 13-35 : Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004 - Ex 13-2

Avec la fonction \ln – intégration par parties pour mettre en place une relation

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a .
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a .
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez $J(a)$.
6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.
b. Démontrez que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.
7. En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.