TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES
CONCENTRATION – LOI DES GRANDS NOMBRES

1) TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

A) TRANSFORMATION AFFINE

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.
On note x_1 , x_2 ,…, x_n les valeurs prises par X.
La variable aléatoire $\mathrm{Y} = a\,\mathrm{X} + b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels $ax_1 + b$, $ax_2 + b$, …, $ax_n + b$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire . On a :

$$\mathrm{E}(a\,\mathrm{X} + b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b \qquad \mathrm{V}(a\,\mathrm{X} + b) = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Preuve : *non exigible*

On note x_1 , x_2 ,…, x_n les valeurs prises par X . On note $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ (pour i allant de 1 à n)

On a alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$

- $$\mathrm{E}(a\,\mathrm{X} + b) = \sum_{i=1}^{m} p_i(a\,x_i + b) = \sum_{i=1}^{m}(a\,p_i\,x_i + b\,p_i) = \sum_{i=1}^{m} a\,p_i\,x_i + \sum_{i=1}^{m} b\,p_i = a\sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i + b\sum_{i=1}^{m} p_i$$

  Or $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. On en déduit que $\mathrm{E}(a\,\mathrm{X} + b) = aE(\mathrm{X}) + b$

- $$\begin{aligned} \mathrm{V}(a\,\mathrm{X} + b) &= \sum_{i=1}^{m} p_i(ax_i + b)^2 - \mathrm{E}(a\,\mathrm{X} + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_i \times (a^2\,x_i^2 + 2\,abx_i + b^2) - (a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (p_i\,a^2\,x_i^2 + p_i\,2\,abx_i + p_i\,b^2) - (a^2\,\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 + 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i^2 + 2\,ab \sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i + b^2 \sum_{i=1}^{m} p_i - a^2\,E(\mathrm{X})^2 - 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2 \end{aligned}$$

Or $2\,ab \sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i = 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $b^2 \sum_{i=1}^{m} p_i = b^2 \times 1 = b^2$ Ainsi $\mathrm{V}(a\,\mathrm{X} + b) = a^2\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\,x_i^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2\right) + 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2 - 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2 = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}7$ et soit $\mathrm{Y} = 2\,\mathrm{X} - 3$
On a $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 6 \times 0{,}7 = 4{,}2$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 6 \times 0{,}7 \times (1 - 0{,}7) = 1{,}26$
On a donc :

$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 2\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - 3 = 2 \times 4{,}2 - 3 = -7{,}8$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = 2^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X}) = 4 \times 1{,}378 = 5{,}04$

B) SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires.
X+Y est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles des valeurs de X et de Y.

Exemple :

Si $\mathrm{X}(\Omega) = \{1;2;3\}$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = \{10;20\}$ alors $(\mathrm{X} + \mathrm{Y})(\Omega) = \{11;12;13;21;22;23\}$

Propriété : *admise*

Soit X et Y deux variables aléatoires . On a :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Cette propriété et E(aX)=aE(X) caractérise la **linéarité de l'espérance.**

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,7$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,2$.
X+Y est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{0,1,2,\dots,16\}$ et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=6\times 0,7+10\times 0,2=6,2$

Propriété : *admise*

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à deux expériences aléatoires telles que les conditions de réalisation sont **indépendantes** . On a :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

- On parle alors de **variables aléatoires indépendantes**.

- Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, on peut avoir $V(X+Y)\neq V(X)+V(Y)$

2) INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF

Propriété : *admise*

Soit X une variable aléatoire et δ un réel strictement positif . On a :

$$P(|X-E(X)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(X)}{\delta^2}$$

- δ est la lettre grecque « delta »

- La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins δ de E(X) est d'autant plus petite que δ est grand.

- $]E(X)-\delta;E(X)+\delta[$ est **un intervalle de fluctuation**

Remarque : En utilisant l'évènement contraire on obtient :

$$P(|X-E(X)|<\delta)\geqslant 1-\frac{V(X)}{\delta^2} \quad\Leftrightarrow\quad P(E(X)-\delta<X<E(X)+\delta)\geqslant 1-\frac{V(X)}{\delta^2}$$

Cas particulier : $\delta=2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X.

On obtient $P(|X-E(X)|\geqslant 2\sigma(X))\leqslant\frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2} \Rightarrow P(|X-E(X)|\geqslant 2\sigma(X))\leqslant\frac{V(X)}{4V(X)} \Rightarrow P(|X-E(X)|\geqslant 2\sigma(X))\leqslant\frac{1}{4}$

Ce qui signifie que la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs s'écartant de son espérance d'au moins le double de son écart type est inférieure à $\frac{1}{4}$.

3) LOI DES GRANDS NOMBRES : LE CAS PARTICULIER DE LOI BINOMIALE

Propriété : *admise*

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p .

Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , associée à la i-ème épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 dans le cas contraire . On a donc $P(X_i=1)=p$

- La variable aléatoire $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i=X_1+X_2+\dots+X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves.
- S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Définition et propriété : *admise*

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, la variable aléatoire $M_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=\frac{S_n}{n}$

Soit δ un réel strictement positif.
En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n et M_n, on obtient :

$$P(|S_n-np|\geqslant\delta)\leqslant\frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad P(|M_n-p|\geqslant\delta)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

La probabilité que les valeurs prises par S_n s'écartent d'au moins δ de son espérance np est d'autant plus petite que δ est grand.

Remarques : En utilisant l'évènement contraire on obtient :

$$P(|S_n-np|<\delta)\geqslant 1-\frac{np(1-p)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(np-\delta<S_n<np+\delta)\geqslant 1-\frac{np(1-p)}{\delta^2}$$

et

$$P(|M_n-p|<\delta)\geqslant 1-\frac{p(1-p)}{n\delta^2} \Leftrightarrow P(p-\delta<M_n<p+\delta)\geqslant 1-\frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

4) LOI DES GRANDS NOMBRES

Définition:

Soit n expériences aléatoires identiques et indépendantes et X_1, X_2, …, X_n les variables aléatoires toutes de même loi associées à ces expériences.

On note à nouveau $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, la variable aléatoire

$$M_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=\frac{S_n}{n}$$

Théorème : *la loi des grands nombres*

Soit une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience.
On répète n fois cette expérience de manière indépendante.
On obtient alors **un échantillon** de taille n composé de n variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, suivant toute la même loi et donc d'espérance E(X) et de variance V(X).

Pour tout réel δ strictement positif, on a :

$$P(|M_n-E(X)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(X)}{n\delta^2} \quad \text{(inégalité de concentration)}$$

L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand le taille de l'échantillon tend vers l'infini. Ce qui s'écrit de manière mathématiques $\lim_{n\to+\infty}P(|M_n-E(X)|\geqslant\delta)=0$

On a :

$E(S_n)=nE(X)$ et $V(S_n)=nV(X)$

$E(M_n)=E(X)$ et $V(M_n)=\frac{V(X)}{n}$

On dit que M_n converge en probabilité vers E(X) quand n tend vers $+\infty$.