

TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

CONCENTRATION – LOI DES GRANDS NOMBRES

1) TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

A) TRANSFORMATION AFFINE

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.

On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par X .

La variable aléatoire $Y = aX + b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Preuve : non exigible

On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par X . On note $p_i = P(X = x_i)$ (pour i allant de 1 à n)

On a alors $E(X) = \sum_{i=1}^m p_i x_i$ et $V(X) = \sum_{i=1}^m p_i x_i^2 - E(X)^2$

$$\bullet \quad E(aX + b) = \sum_{i=1}^m p_i (ax_i + b) = \sum_{i=1}^m (a p_i x_i + b p_i) = \sum_{i=1}^m a p_i x_i + \sum_{i=1}^m b p_i = a \sum_{i=1}^m p_i x_i + b \sum_{i=1}^m p_i$$

$$\text{Or } E(X) = \sum_{i=1}^m p_i x_i \text{ et } \sum_{i=1}^m p_i = 1. \text{ On en déduit que } E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad V(aX + b) &= \sum_{i=1}^m p_i (ax_i + b)^2 - E(aX + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i (a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2) - (aE(X) + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (p_i a^2 x_i^2 + p_i 2abx_i + p_i b^2) - (a^2 E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^m p_i x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^m p_i x_i + b^2 \sum_{i=1}^m p_i - a^2 E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 \end{aligned}$$

$$\text{Or } 2ab \sum_{i=1}^m p_i x_i = 2abE(X) \text{ et } b^2 \sum_{i=1}^m p_i = b^2 \times 1 = b^2 \text{ Ainsi } V(aX + b) = a^2 \left(\sum_{i=1}^m p_i x_i^2 - E(X)^2 \right) + 2abE(X) + b^2 - 2abE(X) - b^2 = a^2 V(X)$$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,7$ et soit $Y=2X-3$

On a $E(X)=6 \times 0,7=4,2$ et $V(X)=6 \times 0,7 \times (1-0,7)=1,26$

On a donc :

$$E(Y) = 2E(X) - 3 = 2 \times 4,2 - 3 = -7,8 \quad \text{et} \quad V(Y) = 2^2 \times V(X) = 4 \times 1,26 = 5,04$$

B) SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires.

$X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles des valeurs de X et de Y .

Exemple :

Si $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ et $Y(\Omega) = \{10; 20\}$ alors $(X+Y)(\Omega) = \{11; 12; 13; 21; 22; 23\}$

Propriété : admise

Soit X et Y deux variables aléatoires . On a :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Cette propriété et $E(aX)=aE(X)$ caractérise la **linéarité de l'espérance**.

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,7$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,2$.

$X+Y$ est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{0,1,2,\dots,16\}$ et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=6\times 0,7+10\times 0,2=6,2$

Propriété : admise

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à deux expériences aléatoires telles que les conditions de réalisation sont **indépendantes** . On a :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

- On parle alors de **variables aléatoires indépendantes**.

- Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, on peut avoir $V(X+Y)\neq V(X)+V(Y)$

2) INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF

Propriété : admise

Soit X une variable aléatoire et δ un réel strictement positif . On a :

$$P(|X-E(X)|\geq\delta)\leq\frac{V(X)}{\delta^2}$$

- δ est la lettre grecque « delta »

- La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins δ de $E(X)$ est d'autant plus petite que δ est grand.

- $[E(X)-\delta; E(X)+\delta]$ est **un intervalle de fluctuation**

Remarque : En utilisant l'évènement contraire on obtient :

$$P(|X-E(X)|<\delta)\geq 1-\frac{V(X)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(E(X)-\delta<X<E(X)+\delta)\geq 1-\frac{V(X)}{\delta^2}$$

Cas particulier : $\delta=2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X.

$$\text{On obtient } P(|X-E(X)|\geq 2\sigma(X))\leq\frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2} \Rightarrow P(|X-E(X)|\geq 2\sigma(X))\leq\frac{V(X)}{4V(X)} \Rightarrow P(|X-E(X)|\geq 2\sigma(X))\leq\frac{1}{4}$$

Ce qui signifie que la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs s'écartant de son espérance d'au moins le double de son écart type est inférieure à $\frac{1}{4}$.

3) LOI DES GRANDS NOMBRES : LE CAS PARTICULIER DE LOI BINOMIALE

Propriété : admise

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p .

Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , associée à la i-ème épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 dans le cas contraire . On a donc $P(X_i=1)=p$

- La variable aléatoire $S_n=\sum_{i=1}^n X_i=X_1+X_2+\dots+X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves.

- S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Définition et propriété : admise

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$

Soit δ un réel strictement positif.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n et M_n , on obtient :

$$P(|S_n - np| \geq \delta) \leq \frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad P(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

La probabilité que les valeurs prises par S_n s'écartent d'au moins δ de son espérance np est d'autant plus petite que δ est grand.

Remarques : En utilisant l'évènement contraire on obtient :

$$P(|S_n - np| < \delta) \geq 1 - \frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(np - \delta < S_n < np + \delta) \geq 1 - \frac{np(1-p)}{\delta^2}$$

et

$$P(|M_n - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(p - \delta < M_n < p + \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

4) LOI DES GRANDS NOMBRES

Définition:

Soit n expériences aléatoires identiques et indépendantes et X_1, X_2, \dots, X_n les variables aléatoires toutes de même loi associées à ces expériences.

On note à nouveau $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , la variable aléatoire

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

Théorème : la loi des grands nombres

Soit une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience.

On répète n fois cette expérience de manière indépendante.

On obtient alors un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , suivant toute la même loi et donc d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Pour tout réel δ strictement positif, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2} \quad (\text{inégalité de concentration})$$

L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Ce qui s'écrit de manière mathématique $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

On a :

$$E(S_n) = nE(X) \quad \text{et} \quad V(S_n) = nV(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.