

## LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite  $(u_n)$ , c'est examiner le comportement des termes  $u_n$  lorsque  $n$  prend des valeurs de plus en plus grandes vers  $+\infty$ .

### 1) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite  $(u_n)$ .

#### cas 1

Intuitivement, si «  $u_n$  est aussi grand que l'on veut dès que  $n$  est assez grand », alors on dit que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

#### De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

#### cas 2

Intuitivement, si les termes  $u_n$  finissent par être négatifs et « si  $u_n$  est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que  $n$  est assez grand », alors on dit que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$ .

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

#### De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme  $]-\infty; A[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$

**Remarque :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$

#### cas 3 (suite convergente)

Soit  $L$  un réel donné.

Intuitivement, dire que  $(u_n)$  a pour limite  $L$ , signifie que lorsque  $n$  est de plus en plus grand, « les nombres  $u_n$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $L$  ».

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

#### De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant  $L$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

#### Remarque :

Si une suite  $(u_n)$  a une limite finie  $L$ , alors la limite  $L$  est unique.

#### cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

#### Exemple :

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  prend successivement les valeurs 1 et -1. Ainsi  $(u_n)$  n'a pas pour limite  $+\infty$ , n'a pas pour limite  $-\infty$  et n'a pas pour limite un réel.

**Remarque :** Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1, cas 2, cas 4)

### 2) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.

Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais ... comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.

On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées. Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

#### • Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où $k$ est un réel donné)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$L$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$ )	$kL$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$ )	$kL$	$-\infty$	$+\infty$

#### Exemple :

Soit la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = 5n^2$

On a  $w_n = 5u_n$  où  $u_n = n^2$

Comme  $5 > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

• **Limite de la suite de terme général  $u_n + v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$L$	$L$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

**Exemple :**

Soit la suite  $(w_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

On a  $w_n = u_n + v_n$  où  $u_n = 5n^2$  et  $v_n = \frac{1}{n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , on en déduit par somme que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

• **Limite de la suite de terme général  $u_n \times v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$L$	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

**Exemple :**

Soit la suite  $(w_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

On a  $w_n = u_n \times v_n$  où  $u_n = -n^2$  et  $v_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , on en déduit par produit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$

• **Limite de la suite de terme général  $\frac{u_n}{v_n}$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$L$	$L$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	$0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Cas où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

**Remarques :**

- « 0 en restant négative ou positive » signifie qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n > n_0$ ,  $(v_n)$  garde un signe constant.
- On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$  pour indiquer que  $(v_n)$  tend vers 0 en restant positive.
- On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^-$  pour indiquer que  $(v_n)$  tend vers 0 en restant négative.

**Exemple :**

Soit la suite  $(w_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $w_n = \frac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$  où  $u_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{1}{n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ , on en déduit par quotient que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

**3) LIMITES ET COMPARAISON**

**Propriété :**

Soit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ .
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

**Preuve du premier point : exigible**

Soit  $M > 0$  et l'intervalle  $]M; +\infty[$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , il existe donc  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, si  $n > n_0$ , alors  $u_n \in ]M; +\infty[$ .

De plus, il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que si  $n > n_1$ , alors  $u_n < v_n$ .

On note  $N$  le maximum de  $n_0$  et  $n_1$ .

On en déduit que, si  $n > N$ , alors  $v_n \in ]M; +\infty[$ .

Ce résultat est vrai pour tout intervalle  $]M; +\infty[$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

### Exemple :

Soit la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = n - \sin(n)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $-1 \leq -\sin(n)$ , donc  $n - 1 \leq n - \sin(n)$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sin(n)) = +\infty$

### Propriété :

- Soit une suite  $(u_n)$  croissante telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ , alors tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont inférieurs ou égaux à  $L$ .
- Soit une suite  $(u_n)$  décroissante telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ , alors tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont supérieurs ou égaux à  $L$ .

### Preuve du premier point :

Raisonnons par l'absurde :

Supposons, qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > L$ .

Considérons alors l'intervalle ouvert centré sur  $L$  :  $I = ]L - (u_{n_0} - L); L + (u_{n_0} - L)[ = ]2L - u_{n_0}; u_{n_0}[$ .

Comme  $(u_n)$  est croissante, pour tout  $n > n_0$ ,  $u_n \geq u_{n_0}$  et  $u_n \notin I$ .

On a donc trouvé un intervalle ouvert contenant  $L$  qui ne contient pas toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang  $n$ .

La supposition de départ est donc fautive et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq L$ .

### Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement : admis

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites vérifiant à partir d'un certain rang  $u_n \leq w_n \leq v_n$

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes de même limite  $L$ , alors la suite  $(w_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ .

## 4) LIMITE DE LA SUITE $(q^n)$ où $q \in \mathbb{R}$

### Propriété :

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

• Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

• Si  $q = 1$ , alors pour tout  $n$ ,  $q^n = 1$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

• Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

• Si  $q \leq -1$ , alors la suite  $(q^n)$  est divergente

### Preuve du troisième point : exigible

• Soit  $a > 0$ . Montrons par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Soit  $P(n)$  la proposition : «  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  »

### Initialisation :

pour  $n = 0$ , on a :  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$  donc  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Supposons que la proposition  $P(n)$  soit vraie pour un entier naturel fixé  $n$ .

On a donc :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Montrons que  $P(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que :  $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

On a :

$(1 + a)^{n+1} = (1 + a) \times (1 + a)^n$  et  $(1 + a)^n \geq 1 + na$

On en déduit que  $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + a) \times (1 + na)$

Or  $(1 + a) \times (1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2$

Comme  $na^2 \geq 0$ , on en déduit que  $1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a \Rightarrow (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

La proposition  $P(n+1)$  est alors vérifiée.

### Conclusion :

On a donc démontré par récurrence que la proposition  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq 0$ .

c'est-à-dire que :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- Montrons que si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

On a  $q > 1$ , on peut donc écrire  $q = 1 + a$  où  $a > 0$ .

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $q^n = (1 + a)^n$

On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q^n \geq 1 + na$

Or, comme  $a > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$

On en déduit donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

### Exemple :

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2^n$  est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Remarque :

On en déduit facilement la limite d'une suite géométrique de terme général  $u_0 q^n$ .

### Exemple :

Soit  $(v_n)$  La suite définie par  $v_n = -5 \times 2^n = -5 \times u_n$  où  $u_n = 2^n$ .

On a vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ; on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

## 5) CONVERGENCE DE SUITES MONOTONES

### Définition :

- Une suite  $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on ait  $u_n \leq M$ .
  - Une suite  $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on ait  $u_n \geq m$ .
  - Une suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Comme pour les fonctions, on dit que  $M$  (respectivement  $m$ ) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

### Propriété : admise

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

### Remarques :

- La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.
- Si une suite est majorée par  $M$ , sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à  $M$ .

### Propriété :

- Toute suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$ .
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$ .

### Preuve du premier point : exigible

Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée et  $A$  un réel strictement positif.

La suite  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe donc un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ .

Or la suite  $(u_n)$  est croissante. Ainsi pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \geq u_{n_0} > A$ .

Ainsi pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in ]A; +\infty[$ .

Tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$ .

### Remarque :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite  $+\infty$ . Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

On peut citer comme exemple la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = ((-1)^n + 1)n$