Raisonnement par récurrence

Ex 1-1 : ***Vrai ou faux***

1) Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n .

2) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=1$.

3) Si une propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=0$.

4) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$, alors elle est héréditaire.

5) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.

6) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.

7) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.

8) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.

Ex 1-2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

Ex 1-3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x\in \mathrm{I}$, on a $f(x)\in \mathrm{I}$.
(u_n) est une suite définie par $u_o\in \mathrm{I}$ et, telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n\in \mathrm{I}$.

2) On suppose que f est croissante sur I. Discuter, suivant les valeurs de u_o et u_1, du sens de variation de la suite (u_n).

3) Que peut-on dire du sens de variation de la suite (u_n) lorsque f est décroissante sur I ?

Comportement global d'une suite

Ex 1-4 : ***Vrai ou faux***

1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.

2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$

4) Si $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$, alors (u_n) est décroissante.

5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

6) Si pour tout entier n, $0 < u_n \leqslant 4$, alors :
- a) (u_n) est minorée par 4.
- b) (u_n) est minorée par 0,
- c) (u_n) est minorée par 1.
- d) 5 est un majorant de (u_n)
- e) (u_n) est bornée.
- f) (u_n) admet une infinité de majorants.

7) Une suite est toujours soit minorée, soit majorée.

8) Un majorant d'une suite est toujours un terme de la suite.

9) Une suite croissante est toujours minorée.

10) Une suite minorée est toujours croissante.

11) Une suite croissante n'est pas majorée.

12) Si pour tout entier naturel n, $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant n+1$
- a) (u_n) est minorée.
- b) (u_n) est majorée.
- c) (u_n) est monotone.

13) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.
- a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.
- c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.
- d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

14) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

15) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n).

Ex 1-5 : ***Déterminer*** u_{n+1} ***en fonction de*** u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.
1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égal à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+5}{4x+1}$

5) $u_n = 7^{n-3}$

6) $u_n = 2n - 5$

7) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

8) $u_n=\dfrac{1}{n+1}$

9) $u_0=8$, $u_1=10$, $u_2=13$, $u_3=17$, $u_4=22$ …

10) $u_0=1$, $u_1=5$, $u_2=21$, $u_3=85$ ...

<u>Ex 1-6 :</u> *Étudier la monotonie*

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-3n+5$

2) $u_n=n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$

4) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n$

5) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

6) $u_n=\dfrac{n^2}{3^n}$

7) $u_n=n^3-12n^2+45n$ (Aide : étudier une fonction)

8) $u_n=\dfrac{n^2-4}{n^2+1}$ (Aide : étudier une fonction)

Ex 1-7 : ***Suites bornées***

Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n=4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1$

2) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{5}+4$

3) $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+2}$

4) $u_n=3-4\sin(5n)$

5) $u_n=\dfrac{3^n}{4}-1$

6) $u_n=1-\sqrt{4-\dfrac{1}{n^2}}$ (pour $n>1$)

7) $u_n=\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\left(3-\dfrac{4}{n}\right)$ (pour $n>1$)

8) $u_n=\dfrac{3+\sin n}{2-\sin n}$

Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 1-8 : ***Vrai ou faux***

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

2) Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers L.

3) Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où $A\in\mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers + ∞ .

4) Si tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$, où $B\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.

6) Une suite peut avoir plusieurs limites.

7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est + ∞ ou - ∞ .

Ex 1-9 : ***Logique***

1) Soit la proposition (P1) : « toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée »

a) (P1) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P1) est-elle vraie ?

2) Soit la proposition (P2) : « toute suite qui tend vers + ∞ n'est pas majorée »

a) (P2) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P2) est-elle vraie ?

Ex 1-10 : ***Suite positive à partir d'un certain rang***

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

Opérations sur les limites

Ex 1-11 : ***Utiliser les opérations sur les limites***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=-2n^2+\dfrac{e}{n}$

2) $u_n=300-n^2\sqrt{2}$

3) $u_n=\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\left(5-\dfrac{1}{n^3}\right)$

4) $u_n=\dfrac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$

5) $u_n=\dfrac{n+2}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-3}$

6) $u_n=\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{5-\dfrac{2}{n^2}}$

7) $u_n=\dfrac{5n^2}{10-\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(5+\dfrac{1}{n}\right)}$

<u>Ex 1-12 :</u> ***Lever une indétermination***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\dfrac{n^5}{5}-\dfrac{n^2}{2}-\mathrm{e}$

2) $u_n=\dfrac{1}{2}n^4-2n^3+5n^2-\dfrac{1}{4}$

3) $u_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+4}$

4) $u_n=\dfrac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$

5) $u_n=\sqrt{n}-n$

6) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

7) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Ex 1-13 : ***Trouver des suites***

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite + ∞ telles que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=1$

d) $u-v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, telles que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=1$

d) uv n'a pas de limite.

Ex 1-14 : ***Raisonnement par l'absurde***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente . Soit (w_n) la suite définie par $w_n=u_n+v_n$.

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+\frac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

Limites et comparaison

Ex 1-15 : ***Théorème de comparaison ou d'encadrement***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\frac{3\sin(n)}{n^2}$

2) $u_n=\frac{3+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$

3) $u_n=3(-1)^n+n$

4) $u_n=\frac{2\cos(n)}{n}+\frac{\sin(n)}{2n}$

5) $u_n=\frac{5n+(-1)^{n+1}}{2n+(-1)^n}$

6) $u_n=-3n^3+3\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Ex 1-16 : ***Avec la fonction exponentielle***

On considère la suite (u_n) définie *par* $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{n+2}$

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0<u_n\leqslant 1$

2) En déduire que, pour tout entier naturel n , $0<u_{n+1}\leqslant\frac{e}{n+2}$

3) Montrer que la suite (u_n) converge.

Ex 1-17 : ***Séries***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$,

$\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant u_n\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\geqslant\sqrt{\frac{n}{2}}$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Limite d'une suite géométrique

Ex 1-18 :

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

2) $u_n = 1{,}00001^n$

3) $u_n = 3 + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

4) $u_n = \left(-\frac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

6) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{4}\right)^k$

7) $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n = \frac{e^n - 4^n}{4^n - 1}$

9) $u_n = \frac{2^{n+1} + 5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 1-19 : ***Nombre rationnel***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3{,}777777\ldots$ (n chiffres 7)
$u_1 = 3{,}7$, $u_2 = 3{,}77$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que 2,47474747… est un nombre rationnel.

Convergence de suites monotones

Ex 1-20 : ***Vrai ou faux***

1) Si (u_n) converge vers L et si pour tout entier naturel n , $u_n>2$, alors $L>2$.

2) Si (u_n) est une suite positive telle que, pour tout entier naturel n , $u_n\leqslant n$, alors la suite (u_n) converge.

3) Toute suite croissante et non majorée tend vers + ∞ .

4) Toute suite croissante et minorée est convergente.

5) Toute suite qui tend vers + ∞ est croissante à partir d'un certain rang.

6) Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.

7) Toute suite convergente est monotone.

8) Toute suite qui converge vers 0 est soit croissante et négative, soit décroissante et positive.

Ex 1-21 : ***Étudier une suite monotone minorée***

(u_n) est la suite définie par $u_0=10$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$.

1) Montrer que la suite est minorée par 5.

2) Montrer que (u_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Ex 1-22 : ***Étudier une suite décroissante non minorée***

(u_n) est la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1}=-(u_n)^2+u_n-1$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante.

2) Montrer que (u_n) n'est pas minorée. (raisonnement par l'absurde)

3) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Ex 1-23 :

(u_n) est la suite définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}$.

1) Étude de la convergence de (u_n) .

a) Montrer que , pour tout entier naturel n , $u_n\geqslant 4$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

2) Détermination de la limite de (u_n) .

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-4\leqslant\frac{1}{8}(u_n-4)$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0\leqslant u_n-4\leqslant\frac{1}{8^n}$

c) En déduire la limite de (u_n) .

Ex 1-24 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=n!$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.

2) Monter que (u_n) n'est pas majorée.

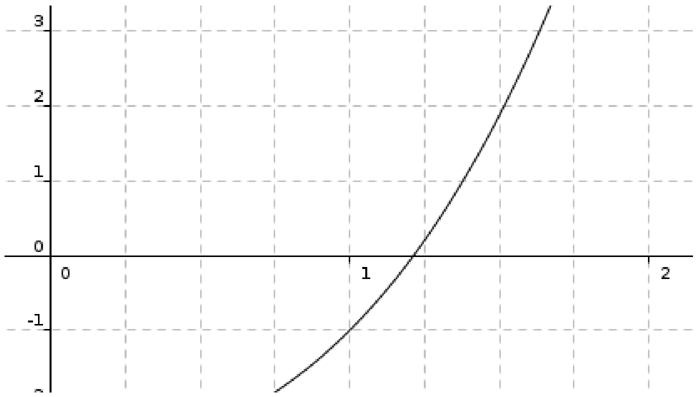
3) En déduire la limite de (u_n) .

Algorithme – Python

Ex 1-25 : Méthode de Newton-Raphson

1) **Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\frac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .

Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et telle que la dérivée ne s'annule pas.

On note C_f sa courbe représentative et x_0 un réel.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

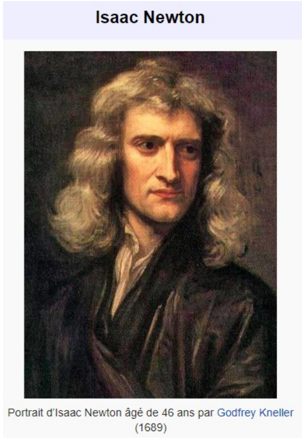
b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir la suite (x_n) des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$.

Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n=10$.

```
from math import *

N=int(input("N="))
x_0=float(input("x_0="))

def f(x):
    return (……………....)

def f_prime(x):
    return (……………....)

def MethodeNewton(x_0, N):
    x=……………...
    for i in range(……………...):
        x.append(……………...……………...……………...)
    return x

print(MethodeNewton(x_0,N))
```



Portrait d'Isaac Newton âgé de 46 ans par Godfrey Kneller (1689)

Tester ce programme pour différente valeur de x_0 . Que constatez-vous ?

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
from math import *

x_0=float(input("x_0="))
p=float(input("p="))

def f(x):
    return (……………....)

def f_prime(x):
    return (……………....)

def MethodeNewton(x_0,p):
    x=……………...
    i=……………...
    x.append(x[0] - f(x[0])/f_prime(x[0]))
    while (……………...……………...>p):
      i=……………...
      x.append(……………...……………...)
    return x

print(MethodeNewton(x_0,p))
```

3) **Application :**

Déterminer les fonctions à utiliser pour déterminer avec ce programme des valeurs approchées à 10^{-10} près : (puis donner ces valeurs approchées)

- de π

- de e

- de $\sqrt{2}$

- du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de $x^2=x+1$)

Attention :
Dans le cas où l'équation $f(x)=0$ admet plusieurs solutions, il faut choisir une valeur de x_0 proche de la solution attendue, afin que l'algorithme converge bien vers cette solution . Il faut aussi tout faire pour que la dérivée ne s'annule pas …
Testez le programme **MethodeNewton.py** (ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Newton.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 1-26 : ***Baccalauréat S Amérique du Sud nov 2019 – Ex 1-4***

Récurrence - variations - limites - suite géométrique - **Algorithme de seuil**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3-\dfrac{10}{u_n+4} \\ u_0 = 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1{,}01$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow 3-\dfrac{10}{u+4}$
Fin du Tant que

3 . Traduire cet algorithme en Python

Ex 1-27 : ***Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019 – Ex 1-4***

Récurrence - variations - limites - suite géométrique - Tableur - **Algorithme de seuil**

python

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.

a. Justifier l'existence de n_0

b. Écrire en Python un algorithme permettant de trouver n_0 , puis déterminer n_0 .

Ex 1-28 : ***Baccalauréat S Métropole sept 2018 – Ex 1-4***

Récurrence - variations - limites – théorème de convergence – Calculatrice - **Algorithme de seuil**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
   b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
   a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   c. Écrire en Python un algorithme permettant de trouver le plus petit entier n_0, tel que $u_{n_0} > 10^6$, puis déterminer n_0.

Ex 1-29 : ***Baccalauréat S Métropole sept 2019 – Ex 1-4***

Récurrence - variations - limites – théorème des gendarmes – représentation graphique

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.